АКАДЕМИЯ НАУК СССР

MTA Számítástechnikai Könyvtára

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

Том VI

12

1961

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР

Главный редактор В. А. КОТЕЛЬНИКОВ
Заместители гл. редактора: Д. В. ЗЕРНОВ, Ю. Б. КОБЗАРЕВ

Редакционная коллегия:

А. И. БЕРГ, Б. А. ВВЕДЕНСКИЙ, И. С. ГОНОРОВСКИЙ, В. Л. ГРАНОВСКИЙ, Н. Д. ДЕВЯТКОВ, Л. Н. ДОБРЕЦОВ, Л. А. ЖЕКУЛИН, А. Н. КАЗАНЦЕВ, С. Г. КАЛАШНИКОВ, П. Л. КАПИЦА, В. В. МИГУЛИН, А. Л. МИКАЭЛЯН, А. А. ПИСТОЛЬКОРС, А. М. ПРОХОРОВ, С. М. РЫТОВ, В. И. СИФОРОВ, Я. Н. ФЕЛЬД, С. Э. ХАЙКИН, Б. М. ЦАРЕВ

Ученый секретарь редакции Г. А. БЕРНАШЕВСКИЙ

MTA. Számtechn. Könyvtára
Leltározva
1962 év 482 sz.

РАДИОТЕХНИКА
И
ЭЛЕКТРОНИКА

MTA Számítástechnikai Könyvtára

Том VI ДЕКАБРЬ, 1961 Вып. 12

СОДЕРЖАНИЕ

Есепкина Н. А., Кайдановский Н. Л., Кузнецов Б. Г., Кузнецова Г. В., Хайкин С. Э. Исследование характеристик излучения остронаправленных зеркальных антенн с отражателем переменного профиля 1947
Арманд Н. А. Флуктуации теплового излучения атмосферы на сантиметровых и миллиметровых волнах 1961
Яковлев В. Н. Применение метода медленно меняющихся параметров для исследования нелинейных автоколебательных систем с запаздыванием . . . 1974
Конторович М. И., Петрунькин В. Ю. О наименьшем числе управляемых элементов в антенне с электрическим качанием луча 1982
Кузьмин Н. А., Макаров Т. В. Электромагнитные волны в прямоугольном крестообразном волноводе 1989
Цюй Янь-шэн. Магнитостатические колебания малого гиротропного сфероида, намагниченного перпендикулярно оси вращения 1998
Котик И. П., Сивов А. Н. Распространение волн типа H_{0n} в кольцевом волноводе с диэлектрической оболочкой и металлическим кожухом 2005
Пошаков Л. Н. О применении леммы Лоренца для приближенного расчета постоянных распространения в электронном приборе типа лампы с поперечным взаимодействием 2012
Корнилов С. А. Комбинационный шум в пролетном клистроне 2017
Иванов С. Н., Скворцова Н. Е., Соколов Ю. Ф. Частотные свойства германиевых диодов со сварным контактом при обратных напряжениях 2028
Загаев В. С., Жеребцова А. А., Павленко В. А. Емкость и последовательное сопротивление германиевых диодов. 2036
Бонч-Бруевич В. Л., Серебренников П. С. О вольтамперной характеристике туннельного диода 2041
Добрецов Л. Н. О термоэлектронных константах 2054
Остроухов А. А. Влияние отбора тока термоэмиссии на температурный режим работы полупроводникового катода 2063
Моргулис Н. Д., Корчевой Ю. П. Физические свойства цезиевой плазмы термоэлектронного преобразователя энергии 2073
Игнатенко В. П., Мясников А. С. Компенсация ионного пространственного заряда электронами 2084

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Виндлер Ю. Б. К вопросу о накоплении шумов и замираний в радиорелейных линиях связи с дальним тропосферным распространением 2093
Уфимцев П. Я. Об отражении металлическими телами радиоволн круговой поляризации 2094
Минкович Б. М. Симметричные диаграммы, реализуемые при помощи круглого излучающего раскрыва 2095
Трохименко Я. К. Зависимость свойств цепочки резонаторов от смещения щелей в смежных диафрагмах 2097
Содержание т. VI журнала «Радиотехника и электроника» за 1961 г. 2100
Именной указатель т. VI журнала «Радиотехника и электроника» за 1961 г. 2110

Адрес редакции: Москва, К-9, Моховая, 11, Институт радиотехники и электроники
АН СССР, редакция журнала «Радиотехника и электроника»

Технический редактор *Т. А. Аверкиева*

Т-11889 Подписано к печати 23/XI 1961 г. Тираж 5985 экз. Заказ 2
Формат бумаги 70×108¹/₁₆. Печ. л. 14,38 Бум. л. 5,25 Уч.-изд. л. 15,7

2-я типография Издательства Академии наук СССР. Москва, Шубинский пер., 10

9 6 1 № 12

ИССЛЕДОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ИЗЛУЧЕНИЯ ОСТРОНАПРАВЛЕННЫХ ЗЕРКАЛЬНЫХ АНТЕНН С ОТРАЖАТЕЛЕМ ПЕРЕМЕННОГО ПРОФИЛЯ

Н. А. Есепкина, Н. Л. Кайдановский, Б. Г. Кузнецов, Г. В. Кузнецова, С. Э. Хайкин

Получены выражения для диаграммы направленности антенны с отражателем переменного профиля. Показано, что форма синфазного раскрыва рассматриваемой антенны изменяется в зависимости от угла места главного максимума диаграммы, что приводит к соответствующему изменению ширины диаграммы в вертикальной плоскости без изменения коэффициента усиления антенны.

Рассмотрен также вопрос о паразитной поляризации в антенне с отражателем переменного профиля.

ВВЕДЕНИЕ

В последнее время выяснилось, что отражатели антенн сантиметровых волн с очень большими эффективными площадями можно выполнять из отдельных, механически не связанных между собой элементов. Это обстоятельство позволяет обеспечить в таких антеннах бо́льшую относительную точность, чем точность в антеннах со сплошным рефлектором.

Одним из путей создания антенн с расчлененным рефлектором является создание антенны с отражателем переменного профиля. Принцип работы такой антенны и некоторые ее особенности рассмотрены в работах [1, 2, 3, 5].

Целью настоящей работы является рассмотрение характеристик излучения антенны с отражателем переменного профиля. В рассматриваемой антенне, в отличие от обычных антенн с подвижной диаграммой, характеристика излучения в вертикальной плоскости изменяется в зависимости от угла места. Характерно, что такое изменение ширины диаграммы не связано с уменьшением усиления антенны. Эта особенность антенны переменного профиля определяется примененным в ней способом перемещения диаграммы в пространстве. Диаграмма направленности поворачивается не за счет перемещения всего отражателя в целом, как в обычных параболических антеннах, а за счет изменения формы отражателя.

Вместе с изменением формы отражателя изменяется не только ориентировка синфазного раскрыва в пространстве, но и форма самого раскрыва. В результате этого при перемещении диаграммы антенны в вертикальной плоскости изменяется ее ширина в этой же плоскости. Перемещение основного луча диаграммы по азимуту не влияет на его форму.

Характеристики направленности антенны определены ниже как по значению поля в ее синфазном раскрыве, так и по электрическим токам на отражателе. Основное внимание уделено исследованию поля антенны в переднем полупространстве. Боковое и заднее излучения в антенне с отражателем переменного профиля имеют примерно такую же структуру как в обычных параболических антеннах и могут быть найдены известными методами [6].

1. ФОРМА СИНФАЗНОГО РАСКРЫВА

Отражатель описываемой антенны преобразует приходящую под угло Θ_0 плоскую волну в цилиндрическую волну с вертикальной образующе (или наоборот). Поместив в фокусе отражателя любой линейный обл чатель, можно сходящуюся цилиндрическую волну сфокусировать точку.

Как описано в [1, 2, 3, 4], отражающая поверхность антенны состои из отдельных плоских элементов высоты h и ширины a.

Для того чтобы поля от всех элементов синфазно складывались направлении Θ_0, их центры в горизонтальной плоскости, проходяще через фокус, должны быть расположены по кривой (см. рис. 1)

$$\rho = \frac{p}{1 + \cos\Theta_0 \cos\varphi} = \frac{R_0 - a_0 \cos\Theta_0}{1 + \cos\Theta_0 \cos\varphi}, \qquad (1$$

где p — параметр линии центров элементов; Θ_0 — главное направлени антенны или угол места источника излучения; R_0 — радиус начальной окружности, по которой расположены элементы при юстировке (ил наблюдении в зените); a_0 — постоянная величина, зависящая от макси мально возможного перемещения элементов ($a_0/R_0 \ll 1$).

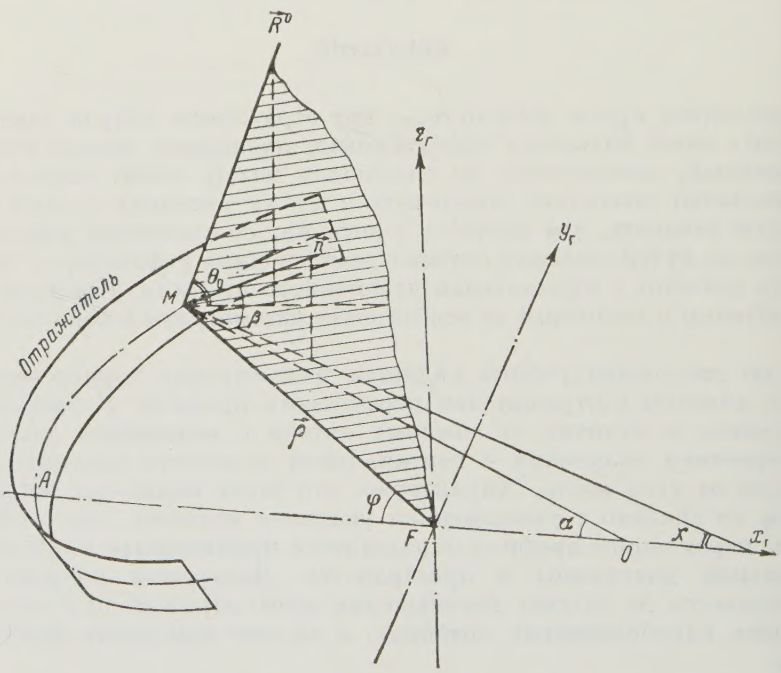


Рис. 1. Профиль отражателя

Уравнение (1) — уравнение конического сечения в полярной систем координат с полюсом в фокусе этого сечения. Эксцентриситет сечени равен $\cos\Theta_0$. Так как $0 \leqslant \cos\Theta_0 \leqslant 1$ ($0 \leqslant \Theta_0 \leqslant \pi/2$), то это — уравн ние эллипса с параметром p, а при $\Theta_0 = 0$ и $\Theta_0 = \pi/2$ — уравнени параболы и окружности соответственно.

В декартовых координатах линия, по которой расположены центр элементов, выражается уравнением

$$y_г^2 + x_г^2 \sin^2\Theta_0 - 2px_г \cos\Theta_0 - p^2 = 0. \qquad (1$$

Расстояние от облучателя, расположенного в фокусе F, до отражателя фокусное расстояние) изменяется по следующему закону:

$$f = AF = \frac{p}{1+\cos\Theta_0} = \frac{R_0 - a_0\cos\Theta_0}{1+\cos\Theta_0}\,. \qquad (2)$$

Угол наклона нормали щита $(\overrightarrow{n})$ к горизонтальной плоскости (β) или угол наклона отражающего элемента к вертикали определяется выражением [2]

$$\sin\beta = \frac{\sin\Theta_0}{\sqrt{2\,(1+\cos\Theta_0\cos\varphi)}}\,. \qquad (3)$$

Угол между проекцией нормали на горизонтальную плоскость и осью $x_г$ (χ), который характеризует поворот отражающего элемента относительно вертикальной оси, определяется выражением [3]

$$\operatorname{tg}\chi = \frac{\sin\varphi}{\cos\Theta_0+\cos\varphi}\,. \qquad (4)$$

Определим форму синфазного раскрыва антенны, для чего спроектируем линию, по которой расположены центры элементов, на плоскость

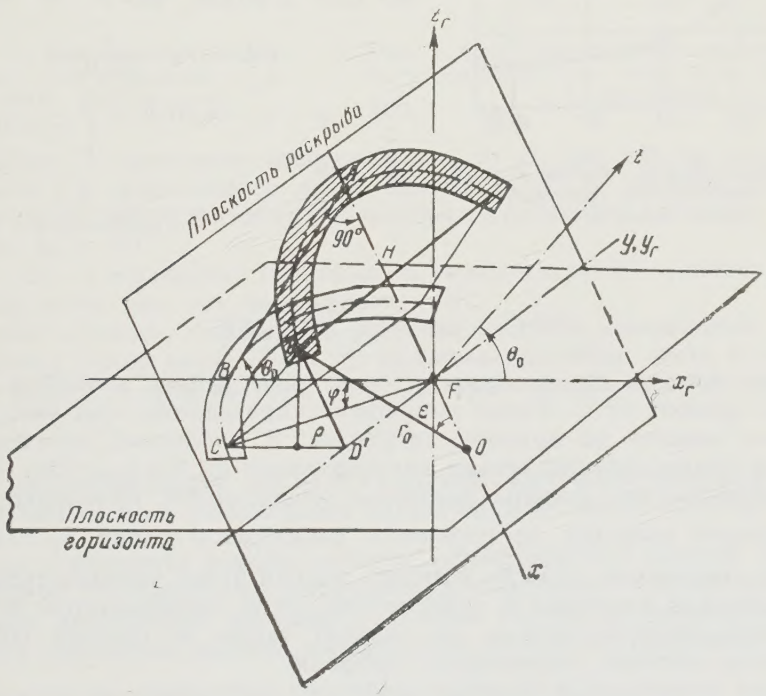


Рис. 2. Форма раскрыва

раскрыва, т. е. на плоскость, перпендикулярную главному направлению (рис. 2). Совместим плоскость $x_г z_г$ горизонтальной системы координат (см. рис. 2), имеющей начало в фокусе F, с главным направлением излучения антенны (AB).

В этом случае синфазный раскрыв антенны будет расположен в плоскости xy. Для удобства вычислений выберем плоскость раскрыва, проходящую через ось $y_г$. Выберем координаты в плоскости раскрыва: начало координат в фокусе F, ось y совпадает с осью $y_г$. Ось z совпадает с главным направлением антенны.

Спроектировав линию, на которой расположены центры элемент (см. (1а)), на плоскость xy — плоскость раскрыва и учитывая, что

$$y = y_г, \quad x_г = \frac{x}{\sin \Theta_0}, \tag{5}$$

получим

$$y^2 + \left(x - p\frac{\cos \Theta_0}{\sin \Theta_0}\right)^2 = \frac{p^2}{\sin^2 \Theta_0}. \tag{6}$$

Это — уравнение окружности с центром на оси x и радиусом $r = p/\sin \Theta$. На рис. 3 дана зависимость r/p от угла места Θ_0.

Таким образом, проекция линии центров элементов для $\Theta_0 > 0$ явл ется окружностью, радиус и положение центра которой зависят от уг Θ_0. При $\Theta_0 = 0$ проекция линии цен ров является прямой линией. Свяж полярный угол φ в горизонтальн плоскости с соответствующим ему плоскости раскрыва углом ε, котор отсчитывается между осью x и ради сом из центра окружности раскрыв Из рис. 2 видно, что

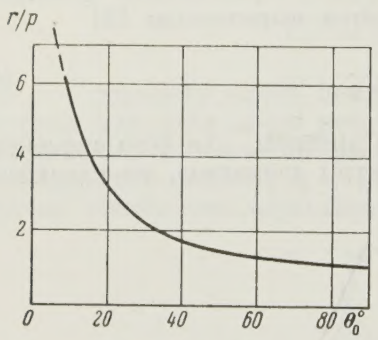


Рис. 3. Зависимость относительного радиуса окружности раскрыва от угла места Θ_0

$$OD = r_0 = \frac{p}{\sin \Theta_0},$$

$$DH = y = y_г = \rho \sin \varphi = \frac{p \sin \varphi}{1 + \cos \Theta_0 \cos \varphi},$$

так как

$$\rho = \frac{p}{1 + \cos \Theta_0 \cos \varphi}.$$

Тогда

$$\sin \varepsilon = \frac{DH}{OD} = \frac{\sin \varphi \sin \Theta_0}{1 + \cos \Theta_0 \cos \varphi}. \tag{7}$$

Будем считать, что раскрыв антенны имеет форму кольца и его ш рина не зависит от ε. Такое допущение справедливо, так как шири раскрыва зависит от наклона элементов, а последний изменяется центра к краям антенны весьма незначительно ($\leqslant 2°$) (см. (3)). Поэто будем считать, что ширина раскрыва определяется проекцией высо центрального элемента на плоскость раскрыва и равна $h_к = h \cos$

По мере увеличения угла Θ_0 ширина кольца будет уменьшаться. Изм нение площади раскрыва в зависимости от Θ_0 определяется не толь изменением ширины кольца, но зависит также от способа облучен отражателя антенны переменного профиля.

Можно установить и облучать некоторое постоянное число элемент При этом горизонтальный размер и разрешение антенны в горизонтальн главной плоскости не будут зависеть от Θ_0, а площадь раскрыва стан уменьшаться с ростом Θ_0.

Если выполнить антенну, оставляя постоянным угол облучения, в этом случае по мере увеличения угла Θ_0 число элементов, попадающ в раствор диаграммы облучателя, растет, так как увеличивается расст ние между облучателем и центральным элементом (см. (2)). Поэтому увеличением угла Θ_0 разрешение антенны в горизонтальной плоскос и площадь раскрыва увеличиваются.

При постоянном числе элементов в антенне ее горизонтальный разм равен

$$D_1 = 2p \operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2}. \tag{8}$$

Соответственно для случая, когда сохраняется постоянным угол облучения, имеем

$$D_2 = 2p \frac{\sin \varphi_0}{1 + \cos \Theta_0 \cos \varphi_0}, \qquad (9)$$

где φ_0 — угол между центральным и крайним элементами при $\Theta_0 = 0$ в первом случае и угол, определяемый диаграммой облучателя,— во втором случае.

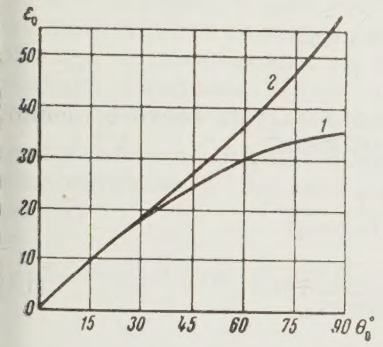


Рис. 4. Зависимость угловой длины дуги в раскрыве ε_0 от угла места Θ_0

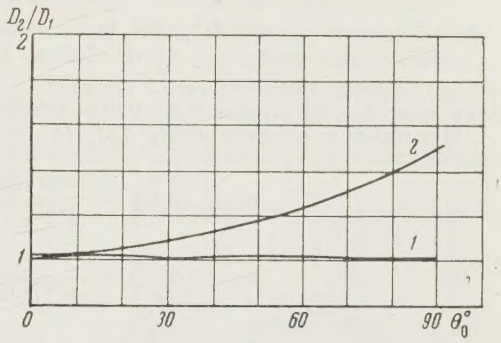


Рис. 5. Рост горизонтального размера антенны от увеличения угла места при постоянном угле облучения

На рис. 4 приведена зависимость ε_0 от Θ_0 для случая постоянного раскрыва *1* и постоянного угла облучения *2*; ε_0 соответствует углу между центральным и крайним элементами в плоскости раскрыва. В обоих случаях $\varphi_0 = 60°$.

На рис. 5 приведена зависимость горизонтального размера антенны от угла места для тех же случаев.

Таким образом, синфазный раскрыв антенны переменного профиля для любых углов места ($\Theta_0 \neq 0$) представляет собой часть кольца, ширина, радиус и центральный угол которого изменяются с изменением угла места Θ_0.

2. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛЯ В РАСКРЫВЕ АНТЕННЫ ПЕРЕМЕННОГО ПРОФИЛЯ ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ ПОЛЯРИЗАЦИЙ ПОЛЯ ОБЛУЧАТЕЛЯ

Поле в раскрыве найдем методом геометрической оптики. При этом необходимо учитывать, что отражающая поверхность состоит из плоских идеально проводящих элементов. В этом случае на поверхности отражающих элементов должны выполняться известные граничные условия:

$$[\vec{n}\vec{E}_i] = -[\vec{n}\vec{E}_r], \quad (\vec{n}\vec{E}_i) = (\vec{n}\vec{E}_r), \qquad (10)$$

где $\vec{n}$ — нормаль к отражающему элементу; $\vec{E}_i$ — падающее поле или поле облучателя; $\vec{E}_r$ — искомое отраженное поле или поле в раскрыве. Сначала рассмотрим случай вертикальной поляризации поля облучателя:

$$\vec{E}_i = A\vec{E}_i^0 = A\vec{i}_{z\,r}, \qquad \vec{E}_r = A\vec{E}_r^0.$$

При выбранной нами системе координат имеем

$$E_{ix}^0 = -\cos \Theta_0, \qquad E_{iy}^0 = 0, \qquad E_{iz}^0 = \sin \Theta_0. \qquad (11)$$

Найдем составляющие орта нормали в системе координат x, y, z, зная его составляющие в системе координат $x_г$, $y_г$, $z_г$. Из рис. 1 и 2 видно, что

$$n_{z\,г} = \sin\beta, \qquad \vec{i}_{x\,г} = \vec{i}_z \cos\Theta_0 + \vec{i}_x \sin\Theta_0,$$
$$n_{x\,г} = \cos\beta\cos\chi, \qquad \vec{i}_{y\,г} = \vec{i}_y, \tag{12}$$
$$n_{y\,г} = \cos\beta\sin\chi, \qquad \vec{i}_{z\,г} = \vec{i}_z \sin\Theta_0 - \vec{i}_x \cos\Theta_0,$$
$$\vec{n} = n_{x\,г}\vec{i}_{x\,г} + n_{y\,г}\vec{i}_{y\,г} + n_{z\,г}\vec{i}_{z\,г},$$

$\vec{i}_{x\,г}$, $\vec{i}_{y\,г}$, $\vec{i}_{z\,г}$ и $\vec{i}_x$, $\vec{i}_y$, $\vec{i}_z$ — орты осей $x_г$, $y_г$, $z_г$ и x, y, z соответственно.

Используя соотношения (3), (4) и (12), получим

$$n_x = (\vec{n}\,\vec{i}_x) = \frac{\sin\Theta_0\cos\varphi}{\sqrt{2+(1+\cos\Theta_0\cos\varphi)}},$$
$$n_y = (\vec{n}\,\vec{i}_y) = \frac{\sin\varphi}{\sqrt{2\,(1+\cos\Theta_0\cos\varphi)}}, \tag{13}$$
$$n_z = (\vec{n}\,\vec{i}_z) = \frac{1+\cos\Theta_0\cos\varphi}{\sqrt{2\,(1+\cos\Theta_0\cos\varphi)}}.$$

Подставив (11) и (13) в (10), получим

$$E^0_{rx} = \frac{\cos\Theta_0+\cos\varphi}{1+\cos\Theta_0\cos\varphi} = \cos\varepsilon, \qquad E^0_{ry} = \frac{\sin\varphi\sin\Theta_0}{1+\cos\Theta_0\cos\varphi} = \sin\varepsilon, \tag{14}$$
$$E^0_{rz} = 0, \quad \text{т. е.} \quad \vec{E}^0_r = -\vec{r}^0.$$

($\vec{r}^0$ — орт радиуса из центра окружности раскрыва, $r^0_x = -\cos\varepsilon$, $r^0_y = -\sin\varepsilon$).

Из выражений (14) видно, что при нормальной (вертикальной) поляризации поля облучателя поле в раскрыве направлено вдоль радиуса из центра раскрыва.

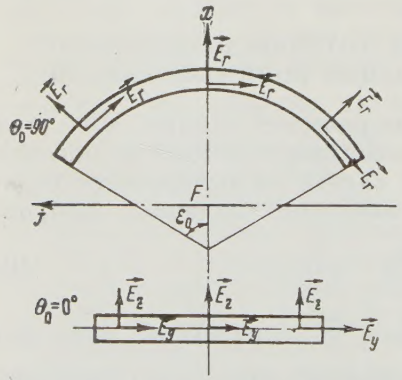


Рис. 6. Характер распределения поля на раскрыве при горизонтальной и вертикальной поляризациях (векторы вдоль раскрыва $-\vec{E}_\tau$)

При горизонтальной поляризации поля облучателя для падающего поля имеем

$$E^0_{ix} = \sin\varphi\sin\Theta_0, \qquad E^0_{iy} = -\cos\varphi,$$
$$E^0_{iz} = \sin\varphi\cos\Theta_0. \tag{15}$$

Подставив (15) и (13) в (10), получим

$$E^0_{ry} = \frac{\cos\Theta_0+\cos\varphi}{1+\cos\Theta_0\cos\varphi} = \cos\varepsilon,$$
$$E^0_{rx} = \frac{\sin\varphi\sin\Theta_0}{1+\cos\Theta_0\cos\varphi} = -\sin\varepsilon, \tag{16}$$

т. е.

$$(\vec{E}^0_r\,\vec{r}^0) = 0.$$

Следовательно, при горизонтальной поляризации поля облучателя поле в раскрыве направлено по касательной к окружности раскрыва.

На рис. 6 представлено распределение поля на раскрыве при вертикальной и горизонтальной поляризациях облучателя.

3. РАСЧЕТ ДИАГРАММЫ НАПРАВЛЕННОСТИ

Зная форму раскрыва и распределение поля на нем, можно определить диаграмму направленности антенны. Найдем поле в дальней зоне антенны, используя приближенную дифракционную формулу [7], которая справедлива при $i/kr \ll 1$, что в нашем случае выполняется

$$\vec{E} = \frac{ik}{2\pi}\int_S [[\vec{n}\vec{E}_1]\,\vec{R}^0]\frac{e^{-ikR}}{R}\,ds, \tag{17}$$

где $\vec{n}$ — нормаль к плоскости раскрыва; $\vec{E}_1$ — поле на раскрыве; $\vec{R}^0$ — орт направления на точку наблюдения; R — расстояние до точки наблюдения; S — поверхность, на которой задано поле. В нашем случае это — площадь раскрыва. Через боковые поверхности, которые можно провести от антенны до плоскости раскрыва, энергия не излучается, так как для них $[\vec{n}\vec{E}] = 0$ (вертикальная поляризация). Сферические составляющие поля антенны в дальней зоне равны (рис. 7)

$$E_\Theta = \frac{ik}{2\pi}\int_S ([[\vec{n},\ \vec{E}_1]\,\vec{R}^0]\vec{\Theta}_0)\,\frac{e^{-ikR}}{R}\,ds,$$

$$E_\psi = \frac{ik}{2\pi}\int_S ([[\vec{n}\vec{E}_1]\,\vec{R}^0]\,\vec{\psi}_0)\,\frac{e^{-ikR}}{R}\,ds. \tag{18}$$

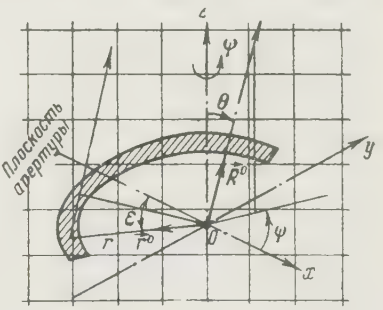


Рис. 7. К расчету поля антенн в дальней зоне

Из рис. 7 видно, что

$$n_x = n_y = 0, \qquad n_z = 1,$$
$$R^0_x = \sin\Theta\cos\psi, \qquad R^0_y = \sin\Theta\sin\psi,$$
$$R^0_z = \cos\Theta, \qquad R = R_1 - \vec{r}\,\vec{R}^0, \qquad \vec{r} = \vec{r}^0 r, \tag{19}$$

где r — расстояние от начала координат до элемента ds на раскрыве; R_1 — расстояние от точки O до точки наблюдения;

$$r^0_x = -\cos\varepsilon, \qquad r^0_y = -\sin\varepsilon, \qquad r^0_z = 0,$$
$$(\vec{r}\vec{R}^0) = -\left(\frac{p}{\sin\Theta_0} + u\right)\sin\Theta\cos(\varepsilon - \psi); \tag{20}$$

$$ds \simeq \frac{p}{\sin\Theta_0}\,du\,d\varepsilon, \tag{21}$$

u изменяется от $h_к/2$ до $-h_к/2$.

Будем считать, что амплитудное распределение поля в раскрыве по углу ε имеет косинусоидальный характер, а по радиусу — оно равномерное:

$$\vec{E}_1 = \cos\gamma\varepsilon\,\vec{E}^0_1. \tag{22}$$

Подставив в (18) выражения (19), (20), (21), (22), а также учитывая, что поле на раскрыве выражается формулами (14) или (16), получим для вертикальной поляризации поля облучателя следующие выражения:

$$E_{эв} = \frac{ik}{2\pi R_1}\,e^{-ikR_1}\frac{p}{\sin\Theta_0}\int_S \cos(\varepsilon - \psi)\cos\gamma\varepsilon\, e^{-ik\left(\frac{p}{\sin\Theta_0}+u\right)\sin\Theta\cos(\varepsilon-\psi)}\,du\,d\varepsilon =$$

$$\frac{A}{\sin\Theta_0}\int_{-\varepsilon_0}^{\varepsilon_0}\cos(\varepsilon - \psi)\cos\gamma\varepsilon\, e^{-ikp\frac{\sin\Theta}{\sin\Theta_0}\cos(\varepsilon-\psi)}\,d\varepsilon\int_{-\frac{h_к}{2}}^{\frac{h_к}{2}} e^{-iku\sin\Theta\cos(\varepsilon-\psi)}\,du, \tag{23}$$

$$E_{\psi\Pi} = -\frac{ik}{2\pi R_1} e^{-ikR_1} \frac{p\cos\Theta}{\sin\Theta_0} \int_{-\varepsilon_0}^{\varepsilon_0} \sin(\varepsilon+\psi)\cos\gamma\varepsilon e^{-ikp\frac{\sin\Theta}{\sin\Theta_0}\cos(\varepsilon-\psi)} d\varepsilon \times$$

$$\times \int_{-\frac{h_K}{2}}^{\frac{h_K}{2}} e^{-iku\sin\Theta\cos(\varepsilon-\psi)} du. \qquad (24)$$

Из формул (23) и (24) видно, что в диаграмме направленности имеется основная и паразитная поляризации.

Для горизонтальной поляризации поля облучателя можно получить формулы, аналогичные формулам (23) и (24); при этом необходимо учитывать выражение (16).

Интегралы в выражениях (23) и (24) точно не интегрируются. Поэтому проинтегрируем их, использовав известное разложение

$$e^{-ikp\frac{\sin\Theta}{\sin\Theta_0}\cos(\varepsilon-\psi)} = I_0\left(kp\frac{\sin\Theta}{\sin\Theta_0}\right) + 2\sum_{n=1}^{\infty} I_n\left(kp\frac{\sin\Theta}{\sin\Theta_0}\right) i^{-n}\cos n(\varepsilon-\psi). \qquad (25)$$

После интегрирования получим

$$E_\Theta = A\frac{1}{\sin\Theta_0}\frac{\sin\left[\frac{kh_K}{2}\sin\Theta\cos\psi\right]}{\frac{kh_K}{2}\sin\Theta\cos\psi}\left\{\cos\psi\left[I_0\left(kp\frac{\sin\Theta}{\sin\Theta_0}\right)f_1(\gamma\varepsilon_0) + \right.\right.$$

$$\left. + \sum_{n=1}^{\infty} J_n\left(kp\frac{\sin\Theta}{\sin\Theta_0}\right) i^{-n}\cos n\psi\, f_2(n,\ \gamma,\ \varepsilon_0)\right] +$$

$$\left. + \sin\psi\left[\sum_{n=1}^{\infty} J_n\left(kp\frac{\sin\Theta}{\sin\Theta_0}\right) i^{-n}\sin n\psi f_3(n,\ \gamma,\ \varepsilon_0)\right]\right\}, \qquad (26)$$

$$E_\psi = -B\frac{\cos\Theta}{\sin\Theta_0}\frac{\sin\left[\frac{kh_K}{2}\sin\Theta\cos\psi\right]}{\frac{kh_K}{2}\sin\Theta\cos\psi}\left\{\sin\psi\left[J_0\left(kp\frac{\sin\Theta}{\sin\Theta_0}\right)f_1(\gamma\varepsilon_0) + \right.\right.$$

$$\left. + \Sigma J_n\left(kp\frac{\sin\Theta}{\sin\Theta_0}\right)(i)^{-n}\cos n\psi f_2(n,\ \gamma,\ \varepsilon_0)\right] +$$

$$\left. + \cos\psi\left[\sum_{n=1}^{\infty} J_n\left(kp\frac{\sin\Theta}{\sin\Theta_0}\right) i^{-n}\sin n\psi f_3(n,\ \gamma,\ \varepsilon_0)\right]\right\}, \qquad (27)$$

где

$$f_1 = \frac{\sin(\gamma-1)\varepsilon_0}{\gamma-1} + \frac{\sin(\gamma+1)\varepsilon_0}{\gamma+1};$$

$$f_2 = \frac{\sin(n-\gamma-1)\varepsilon_0}{n-\gamma-1} + \frac{\sin(n-\gamma+1)\varepsilon_0}{n-\gamma+1} + \frac{\sin(n+\gamma+1)\varepsilon_0}{n+\gamma+1} + \frac{\sin(n+\gamma-1)\varepsilon_0}{n+\gamma-1}$$

$$f_3 = \frac{\sin(n-\gamma-1)\varepsilon_0}{n-\gamma-1} - \frac{\sin(n-\gamma+1)\varepsilon_0}{n-\gamma+1} - \frac{\sin(n+\gamma+1)\varepsilon_0}{n+\gamma+1} + \frac{\sin(n+\gamma-1)\varepsilon_0}{n+\gamma-1}$$

При интегрировании выражений (23) и (24) считалось, что

$$\frac{\sin\left[\frac{kh_к}{2}\sin\Theta\cos(\varepsilon-\psi)\right]}{\frac{kh_к}{2}\sin\Theta\cos(\varepsilon-\psi)} \approx \frac{\sin\left[\frac{kh_к}{2}\sin\Theta\cos\psi\right]}{\frac{kh_к}{2}\sin\Theta\cos\psi}.$$

Такое предположение справедливо, так как в приведенном выражении зависимость от ε слабая ($0 \leqslant \varepsilon \leqslant 60°$) и проявляется лишь при больших $\sin\Theta$, т. е. в боковых лепестках.

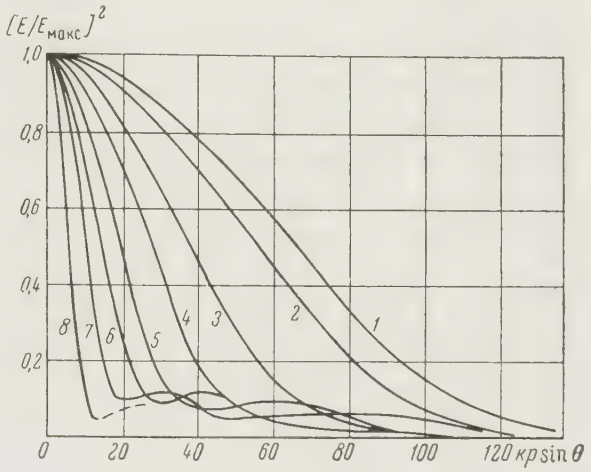


Рис. 8. Вертикальные диаграммы антенны при различных углах места и постоянном угле облучения:

1 — $\Theta_0 = 0°$; *2* — $\Theta_0 = 10°$; *3* — $\Theta_0 = 20°$; *4* — $\Theta_0 = 30°$; *5* — $\Theta_0 = 40°$; *6* — $\Theta_0 = 50°$; *7* — $\Theta_0 = 60°$; *8* — $\Theta_0 = 90°$

На рис. 8, 9, 10 приведены вертикальные ($\psi = 0$) и горизонтальные ($\psi = \pi/2$) диаграммы направленности для различных углов Θ_0 для постоянного числа элементов и постоянного угла облучения. Диаграммы рассчитывались для постоянного распределения поля в раскрыве ($\gamma = 0$).

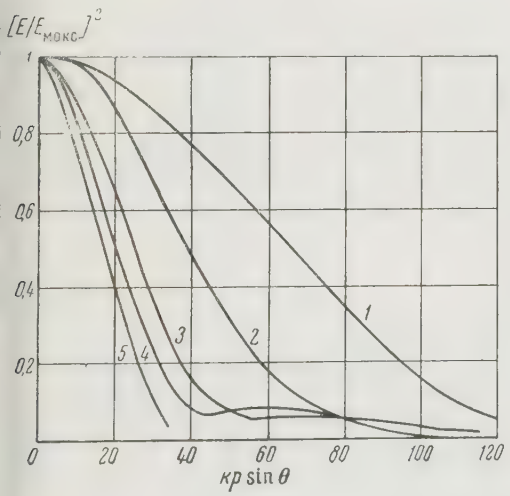


Рис. 9

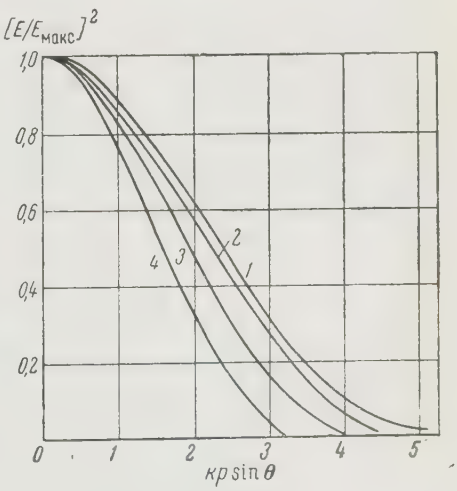


Рис. 10

Рис. 9. Вертикальные диаграммы антенны при различных углах места и постоянном горизонтальном размере:

1 — $\Theta_0 = 0°$; *2* — $\Theta_0 = 20°$; *3* — $\Theta_0 = 40°$; *4* — $\Theta_0 = 60°$; *5* — $\Theta_0 = 90°$

Рис. 10. Горизонтальные диаграммы антенны при различных углах места и постоянном угле облучения

$$D = 2p\left(\frac{\sin\varphi_0}{1+\cos\varphi_0\cos\Theta_0}\right):$$

1 — $\Theta_0 = 0°$; *2* — $\Theta_0 = 30°$; *3* — $\Theta_0 = 60°$; *4* — $\Theta_0 = 90°$

Выражения (26) и (27) определяют поле антенны для любых углов места, отличных от нуля ($90° \leqslant \Theta_0 < 0$). Но по мере уменьшения угла Θ_0 эти выражения становятся малоудобными для расчетов, поскольку форма раскрыва приближается к прямоугольной и сходимость рядов ухудшается.

Необходимо отметить, что приведенные формулы не справедливы для $\Theta_0 = 0$. В этом случае синфазный раскрыв имеет форму прямоугольника, и диаграммы направленности определяются по известным формулам.

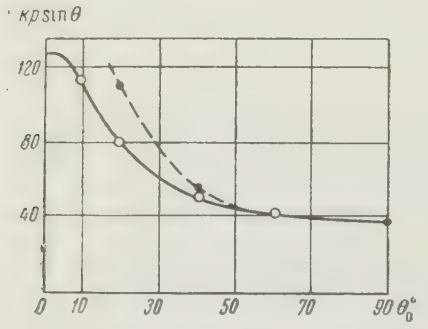


Рис. 11. Зависимость ширины вертикальной диаграммы антенны по уровню 0,5 $P_{макс}$ от угла места при постоянном горизонтальном размере

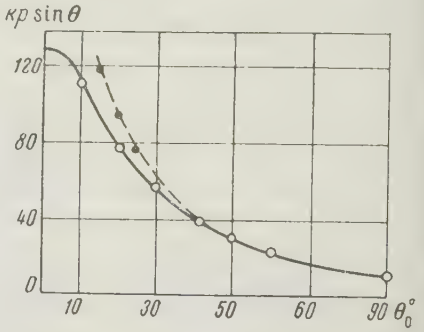


Рис. 12. Зависимость ширины вертикальной диаграммы антенны по уровню 0,5 $P_{макс}$ от угла места при постоянном угле облучения

Из выражений (26) и (27) и кривых, приведенных на рис. 8, 9, 10, видны две особенности диаграмм направленности антенны переменного профиля: изменение ширины вертикальной диаграммы с изменением угла Θ_0 и наличие паразитной поляризации.

Вертикальная диаграмма зависит от угла наблюдения Θ_0. Если при $\Theta_0 = 0$ антенна имеет ножевую диаграмму, то при $\Theta_0 = 90°$ диаграмма направленности антенны близка к игольчатой. Это объясняется влиянием глубины синфазного раскрыва H, равной отрезку AH (см. рис. 2). При малых углах места $0 < \Theta_0 \leqslant 10°$, когда глубина раскрыва, равная проекции глубины антенны H_0 на раскрыв ($H = H_0 \sin \Theta_0$), сравнима с высотой элемента h или меньше ее, диаграмма определяется размером элемента. При углах $\Theta_0 > 10°$ диаграмма определяется в основном глубиной раскрыва и сужается по мере увеличения угла места, т. е. увеличения глубины. Ширина вертикальной диаграммы по уровню половины мощности ($\Theta_{0,5\,P_{макс}}$) изменяется примерно как

$$\Theta_{0,5\,P_{макс}} \sim \frac{\lambda}{H_0 \sin \Theta_0}. \qquad (28)$$

В случае антенны с постоянным числом элементов H_0 постоянно, а у антенны с постоянным углом облучения H_0 выражается формулой

$$H_0 = p\left[\frac{1}{1+\cos\Theta_0} - \frac{1}{2+\cos\Theta_0}\right], \quad \varphi_0 = 60°. \qquad (29)$$

На рис. 11 и 12 приведена ширина вертикальной диаграммы, найденная из кривых на рис. 8 и 9, для различных углов Θ_0. На этих же рисунках пунктиром указана ширина вертикальной диаграммы, определенная по формулам (28) и (29). Совпадение кривых показывает, что ширина вертикальной диаграммы действительно определяется глубиной раскрыва.

Изменение горизонтальной диаграммы с изменением угла места связано с увеличением горизонтального размера антенны и происходит только при постоянном угле облучения.

Сужение вертикальной диаграммы антенны переменного профиля связано с искривлением раскрыва, а не с увеличением площади; поэтому такое сужение диаграмм не дает увеличения коэффициента усиления. Ниже этот вопрос рассмотрен более подробно.

Сужение диаграммы по уровню 0,5 $P_{макс}$ компенсируется появлением небольшого уровня излучения, распределенного в большом телесном угле.

На рис. 13 приведены сечения диаграммы направленности для $\Theta_0 = 90°$ плоскостью, параллельной плоскости раскрыва, по уровню 0,5 $P_{макс}$ и 0,05$P_{макс}$. Точки для них взяты из рис. 14, на котором представлены азимутальные сечения диаграммы, т. е. сечения плоскостями, проходящими через оптическую ось антенной системы. Как видно из рис. 13 и 14, на высоких углах места

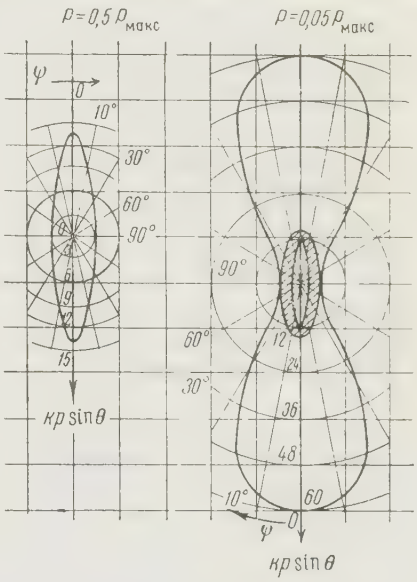


Рис. 13. Сечение пространственной диаграммы ($\Theta_0 = 90°$) плоскостями, перпендикулярными оптической оси, по уровню 0,5 $P_{макс}$ и 0,05 $P_{макс}$. Заштрихована область, где уровень паразитной поляризации превосходит 5%

($\Theta_0 \to 90°$) одновременно с сужением главного лепестка диаграммы происходит перераспределение излучаемой энергии на боковых направлениях, близких к главному направлению. В результате этого у основного лепестка диаграммы появляются «хвосты», в которых заключена большая доля излученной энергии. Поэтому при $\Theta_0 \to 90°$ не происходит увеличения усиления антенны.

Следует заметить, что на углах излучения, лежащих вне пределов диаграммы направленности отдельного элемента («щита»), уровень боковых лепестков сравнительно мал и не превышает 0,5% $P_{макс}$.

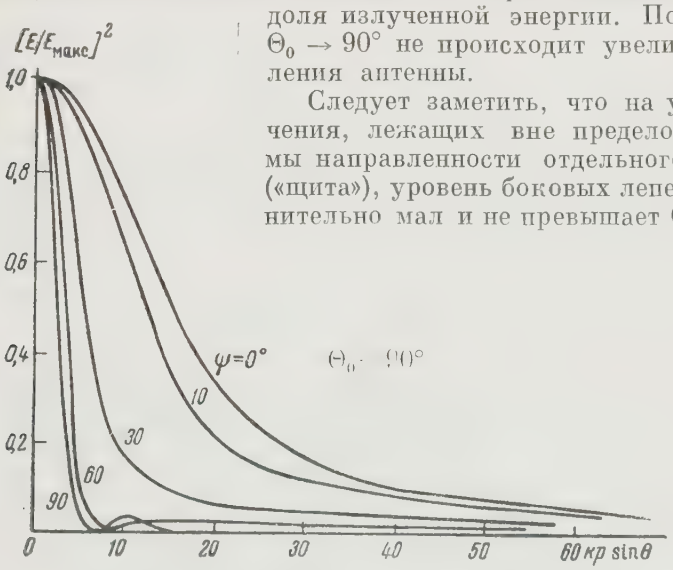


Рис. 14. Сечение пространственной диаграммы ($\Theta_0 = 90°$) плоскостями, проходящими через оптическую ось (при ψ = =0°—вертикальная диаграмма, при $\psi = 90°$—горизонтальная диаграмма)

Из выражений (26) и (27) видно, что в диаграмме антенны появляются лепестки с паразитной поляризацией. Величина этих лепестков растет

с увеличением Θ_0 (см. рис. 15). На рис. 13 заштрихованными областями отмечены направления, где уровень паразитной поляризации (кросс-поляризации) превосходит 5% $P_{макс}$. Как видно из рис. 13, лепестки с паразитной поляризацией концентрируются к горизонтальному главному сечению диаграммы ($\psi = \pi/2$). В этом и заключается отличие антенны с отражателем переменного профиля от обычных антенн типа параболоидов вращения, у которых лепестки паразитной поляризации расположены под углом 45° к главным плоскостям антенны.

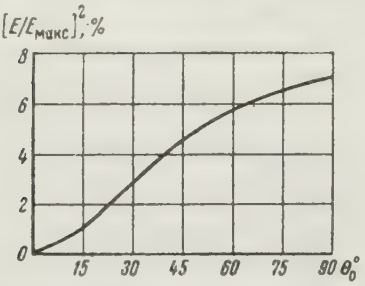


Рис. 15. Зависимость относительной мощности в лепестках с паразитной поляризацией от угла места

Поле в паразитных лепестках антенны переменного профиля имеет сдвиг фазы $\pi/2$ относительно основной поляризации. Поэтому в антенне переменного профиля поляризация сигнала с боковых направлений будет эллиптической, а для определенных углов Θ_0, для которых величины основной и кросс-поляризационной составляющих равны, оказывается круговой.

Наличие паразитной поляризации затрудняет поляризационные наблюдения на антенне переменного профиля, а также несколько уменьшает коэффициент использования, особенно при больших Θ_0. Поэтому желательно уничтожить эту поляризацию. Для этого необходимо, чтобы облучатель антенны имел определенную поляризационную диаграмму направленности. Зависимость поляризации поля облучателя от угла φ должна быть такой, чтобы на раскрыве поляризация была постоянной по всему раскрыву (горизонтальной или вертикальной). В этом случае паразитной круговой поляризации не будет. Такой облучатель создать возможно. Некоторые пути для создания такого облучателя рассмотрены в работе [8].

По формулам (26) и (27) были рассчитаны диаграммы для косинусоидального распределения поля на раскрыве (случай $E_{\varepsilon\ \varepsilon_0} = 0{,}3\,E_{макс}$).

В этом случае диаграммы также имеют указанные выше особенности. Спадающее распределение примерно в 1,2 раза расширяет горизонтальную диаграмму и в 1,4 раза — вертикальную, при этом уменьшается уровень лепестков паразитной поляризации.

Диаграммы направленности были рассчитаны также и по токам на отражателе. В этом случае для основной составляющей поля при вертикальной поляризации поля облучателя и равномерном облучении отражателя получено следующее выражение:

$$E_0 = A \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} V_1(\Theta, \varphi, \psi)\, V_2(\Theta, \varphi, \psi)\, e^{-ikp\Phi(\Theta, \varphi, \psi)}\, d\varphi, \tag{30}$$

где

$$V_1(\Theta, \varphi, \psi) = \frac{\sin\Theta \sin\Theta_0 \cos\varphi + \cos\Theta\,(1 + \cos\Theta_0 \cos\varphi)}{\sqrt{1 + \cos\Theta_0 \cos\varphi}\ \sqrt{(1 + \cos\Theta_0 \cos\varphi)^2 + \sin^2\Theta_0}};$$

$$V_2(\Theta, \varphi, \psi) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} e^{-iku F(\Theta, \varphi, \psi)}\, du;$$

$$\Phi(\Theta, \varphi, \psi) = \frac{1 + \sin\varphi \sin\psi + \cos\Theta \cos\varphi \cos\psi}{1 + \cos\Theta_0 \cos\varphi};$$

$$F(\Theta, \varphi, \psi) = \frac{\sin\Theta_0\,(1 + \cos\varphi \cos\Theta \cos\psi + \sin\varphi \sin\psi) - (1 + \cos\Theta_0 \cos\varphi)\cos\psi \sin\Theta}{\sqrt{(1 + \cos\Theta_0 \cos\varphi)^2 + \sin^2\Theta_0}}.$$

Из выражения (30) видно, что в главном направлении $\Theta = \Theta_0$, $\psi = 0$ поля от всех элементов антенны переменного профиля складываются

инфазно при любых Θ_0. Действительно

$$F(\Theta_0, \varphi, 0) = 0,$$

$$\Phi(\Theta_0, \varphi, 0) = \frac{1 + \sin\varphi \sin\psi + \cos\Theta \cos\varphi \cos\psi}{1 + \cos\Theta_0 \cos\varphi} = \frac{1 + \cos\Theta_0 \cos\varphi}{1 + \cos\Theta_0 \cos\varphi} = 1.$$

Это происходит потому, что у антенны переменного профиля изменяется кривая, по которой устанавливаются центры элементов ($\rho = p/(1 + \cos\theta_0 \cos\varphi)$), в то время как у обычного параболического цилиндра при электрическом качании луча на значительную величину ($\Theta_0 \neq 0$) поля в главном направлении от отдельных частей антенны складываются несинфазно, в результате чего и происходит искажение диаграммы. В этом случае

$$\Phi = \frac{1 + \sin\varphi \sin\psi + \cos\Theta \cos\varphi \cos\psi}{1 + \cos\Theta_0 \cos\varphi}\Bigg|_{\psi=0,\ \Theta=\Theta_0} = \frac{1 + \cos\Theta_0 \cos\varphi}{1 + \cos\varphi} \neq \text{const},$$

так как $\rho = p/(1 + \cos\varphi)$. Выражение (30) точно не интегрируется, за исключением случая $\Theta_0 = 90°$. При некоторых допущениях выражение (30) интегрируется приближенно, причем при $\Theta_0 \leqslant 60°$ для диаграммы направленности получаются довольно простые выражения. Были рассчитаны диаграммы направленности для различных Θ_0, которые оказались подобными диаграммам, приведенным на рис. 8, 9, 10.

4. КОЭФФИЦИЕНТ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ПОВЕРХНОСТИ РАСКРЫВА АНТЕННЫ ПЕРЕМЕННОГО ПРОФИЛЯ

Определим коэффициент использования поверхности раскрыва антенны переменного профиля для различных углов наблюдения Θ_0. Будем полагать, что антенна изготовлена идеально, т. е. фазовых ошибок на раскрыве антенны нет. Поэтому в рассматриваемом случае коэффициент использования будет определяться только распределением амплитуды поля на раскрыве и величиной составляющей паразитной поляризации. Коэффициент усиления синфазной апертуры равен [9]

$$G = \frac{4\pi}{\lambda^2} \frac{\left|\int\limits_S F_{\text{осн}}(\xi, \eta)\, ds\right|^2}{\int\limits_S F^2(\xi, \eta)\, ds},$$

где $F(\xi, \eta) = \sqrt{F_{\text{осн}}^2 + F_{\text{пар}}^2}$ — амплитудное распределение поля по апертуре; $F_{\text{осн}}(\xi, \eta)$ — амплитудное распределение по апертуре поля основной поляризации; $F_{\text{пар}}(\xi, \eta)$ — амплитудное распределение по апертуре поля кросс-поляризации.

При расчетах мы всегда предполагали, что по высоте элемента ширина апертуры hk) распределение поля равномерное, поэтому

$$F = f(\varepsilon) = \cos\gamma\varepsilon,$$

$$F_{\text{осн}} = \cos\gamma\varepsilon \cos\varepsilon, \qquad F_{\text{пар}} = \cos\gamma\varepsilon \sin\varepsilon,$$

$$F^2 = F_{\text{осн}}^2 + F_{\text{пар}}^2 = \cos^2\gamma\varepsilon\,(\sin^2\varepsilon + \cos^2\varepsilon) = \cos^2\gamma\varepsilon.$$

Тогда

$$G = \frac{4\pi}{\lambda^2} \frac{\left|\int\limits_{r_0 - \frac{h}{2}\cos\frac{\Theta_0}{2}}^{r_0 + \frac{h}{2}\cos\frac{\Theta_0}{2}} \int\limits_{-\varepsilon_0}^{\varepsilon_0} \cos\gamma\varepsilon \cos\varepsilon\, dr d\varepsilon\right|^2}{\int\limits_{r_0 - \frac{h}{2}\cos\frac{\Theta_0}{2}}^{r_0 + \frac{h}{2}\cos\frac{\Theta_0}{2}} \int\limits_{-\varepsilon_0}^{\varepsilon_0} \cos^2\gamma\varepsilon\,[\sin^2\varepsilon + \cos^2\varepsilon]\, dr d\varepsilon}, \tag{31}$$

где $r_0 = p/\sin\Theta_0$ — радиус синфазного раскрыва. Проинтегрировав (31), получим

$$G = \frac{4\pi}{\lambda^2} 2r_0\varepsilon_0 h \cos\frac{\Theta_0}{2} \frac{\left[\frac{\sin(\gamma-1)\varepsilon_0}{\gamma-1} + \frac{\sin(\gamma+1)\varepsilon_0}{\gamma+1}\right]^2}{\varepsilon_0^2 2\left[1+\frac{\sin 2\gamma\varepsilon_0}{2\gamma\varepsilon_0}\right]} = \frac{4\pi}{\lambda} S_{\text{раскр}}\,\eta, \quad (32)$$

где

$$\eta = \frac{\left[\frac{\sin(\gamma-1)\varepsilon_0}{\gamma-1} + \frac{\sin(\gamma+1)\varepsilon_0}{\gamma+1}\right]^2}{2\left(1+\frac{\sin 2\gamma\varepsilon_0}{2\gamma\varepsilon_0}\right)\varepsilon_0^2}; \qquad S_{\text{раскр}} = 2r_0\varepsilon_0 h\cos\frac{\Theta_0}{2}; \quad (33)$$

η — коэффициент использования.

Из выражения (32) видно, что коэффициент усиления изменяется при изменении угла Θ_0 как за счет изменения коэффициента использования η, так и за счет изменения площади раскрыва.

Θ_0°	$\gamma = 0$		$\gamma\varepsilon_0 = \frac{\pi}{2}$	
	η_1	η_2	η_1	η_2
0	1	1	0,81	0,81
30	0,96	0,96	0,79	0,79
45	0,94	0,92	0,77	0,76
60	0,90	0,85	0,76	0,74
90	0,87	0,69	0,75	0,71

Рассмотрим, как изменяется коэффициент использования в зависимости от угла Θ_0. Из выражений (33) видно, что при равномерном облучении ($\gamma = 0$) коэффициент использования равен

$$\eta = \left(\frac{\sin\varepsilon_0}{\varepsilon_0}\right)^2. \quad (34)$$

При косинусоидальном распределении в случае $\gamma\varepsilon_0 = \pi/2$ (на краю раскрыва поле равно нулю при всех Θ_0) имеем

$$\eta = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon_0\right)}{\frac{\pi}{2}-\varepsilon_0} + \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\varepsilon_0\right)}{\frac{\pi}{2}+\varepsilon_0}\right]^2. \quad (35)$$

В таблице приведены коэффициенты использования, рассчитанные по формулам (34) и (35), для случая постоянного горизонтального размера антенны — η_1 и постоянного угла облучения — η_2 ($\varphi_0 = 60°$). При расчете использована зависимость $\varepsilon_0 = f(\Theta_0)$, приведенная на рис. 4.

Из таблицы видно, что при спадающем распределении изменение коэффициента использования при изменении Θ_0 невелико.

В заключение авторы выражают благодарность Б. В. Брауде за ценные указания и участие в обсуждении результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Э. Хайкин, Н. Л. Кайдановский, Приборы и техника эксперимента, 1959, 2, 19.
2. Н. А. Есепкина, Автореферат кандидатск. диссертации, ЛПИ им. Калинина, 1958.
3. Исследование возможности создания радиотелескопа с переменным профилем отражателя с площадью выходного отверстия 10 000—20 000 $м^2$ для сантиметровых волн, Отчет ЛПИ им. Калинина, 1959.
4. С. Э. Хайкин, Н. Л. Кайдановский, Н. А. Есепкина, О. Н. Шиврис, Изв. ГАО, 1960, **21**, вып. 5, № 164, 3.
5. Б. В. Брауде, Н. А. Есепкина, Н. Л. Кайдановский, С. Э. Хайкин, Радиотехника и электроника, 1960, **5**, 4, 584.
6. В. Ю. Петрунькин, Кандидатск. диссертация, ЛПИ им. Калинина, 1953.
7. В. Ю. Петрунькин, Тр. ЛПИ им. Калинина, 1955, № 181, стр. 75.
8. Н. С. Соболева, Г. В. Кузнецова, Докл. на расширенном Пленуме комиссии по радиоастрономии Астрономического совета АН СССР, Москва, 1960.
9. Антенны сантиметровых волн, перев. с англ., **1**, Изд. Советское радио, 1950.

Поступила в редакцию
22 II 1961

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

1961 № 12

ФЛУКТУАЦИИ ТЕПЛОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ АТМОСФЕРЫ НА САНТИМЕТРОВЫХ И МИЛЛИМЕТРОВЫХ ВОЛНАХ

Н. А. Арманд

Теоретически исследованы флуктуации теплового излучения атмосферы. Получены расчетные формулы для дисперсии яркостной температуры антенны в случае безоблачной атмосферы и в случае присутствия в атмосфере статистически однородного облачного слоя. Проведены расчеты угловой корреляции теплового излучения атмосферы.

ВВЕДЕНИЕ

В радиоастрономии широко применяется метод наблюдения астрономических объектов по их собственному излучению. Это излучение, естественно, наблюдается на фоне теплового излучения атмосферы. Поэтому исследование характеристик теплового излучения атмосферы имеет большое значение. К настоящему времени наиболее подробно исследованы средние величины теплового излучения атмосферы [1—4]. Флуктуационные свойства этого излучения изучены мало. Насколько известно автору, всего лишь в одной статье [7] опубликованы оценки интенсивности флуктуаций яркостной температуры антенны, регистрирующей тепловое излучение атмосферы, полученные на основе спектрального метода. В упомянутой работе предполагается сначала, что яркостная температура антенны значительно меньше термодинамической температуры атмосферы и что флуктуации излучения атмосферы в основном обусловлены флуктуациями температуры. Кроме того, автор работы [7] произвольно, на наш взгляд, переносит статистические свойства температуры T атмосферы на величину αT (в нашем обозначении), где α — коэффициент поглощения атмосферы, T — ее температура.

Приведенное ниже рассмотрение свободно от этих предположений и позволяет исследовать случаи сильного поглощения излучения в атмосфере, учесть флуктуации влажности, которые наиболее эффективно сказываются на миллиметровых радиоволнах. Хотя численные результаты в соответствующих частях диапазона радиоволн при совпадающих условиях (безоблачная атмосфера) примерно одинаковы, тем не менее в результатах обнаруживается качественное различие. Это различие, в частности, заключается в том, что по нашим вычислениям квадрат дисперсии температуры антенны пропорционален первой степени внешнего масштаба турбулентных флуктуаций, а в [7] квадрат дисперсии температуры антенны пропорционален кубу этого масштаба. По нашему мнению, причина этого различия кроется в том, что автор [7] использовал формулу для трехмерной спектральной плотности в форме $k^{-11/3}$, в то время как по смыслу уравнения переноса следует пользоваться одномерной спектральной плотностью в форме $k^{-5/3}$.

Наша работа состоит из трех частей. В первой части установлены статистические свойства коэффициента поглощения излучения в воздухе и облаках. По поводу последнего заметим, что статистические свойства коэффициента поглощения в облаках определяются статистическими свойствами водности. Эти свойства, к сожалению, еще совершенно не изучены, и поэтому мы вынуждены делать некоторые специальные предположения. В силу этого соответствующие результаты следует расценивать как предварительные.

Во второй части исследованы флуктуации яркостной температуры антенны. Случай безоблачной атмосферы здесь рассматривается как частный случай облачной атмосферы.

Наконец, в третьей части установлены угловые корреляционные связи флуктуаций теплового излучения атмосферы, свободной от облаков.

1. СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ КОЭФФИЦИЕНТА ПОГЛОЩЕНИЯ РАДИОВОЛН В ВОЗДУХЕ

Как известно, поглощение в воздухе электромагнитного излучения в сантиметровом и миллиметровом диапазонах волн обусловлено в основном поглощением в кислороде и парах воды. Поэтому коэффициент поглощения в воздухе представим в виде суммы

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2, \tag{1}$$

где α_1 — коэффициент поглощения в кислороде; α_2 — коэффициент поглощения в парах воды. Как показано в [2, 3], α_1 и α_2 с высотой меняются по экспоненциальному закону и

$$\alpha(z) = \alpha_{10} e^{-z/H_1} + \alpha_{20} e^{-z/H_2}, \tag{2}$$

причем $H_1 \simeq 5{,}3 \cdot 10^3$ *м*, а $H_2 \simeq 2{,}1 \cdot 10^3$ *м*. В дальнейшем для простоты вычислений мы будем полагать

$$\alpha(z) = \alpha_0 e^{-z/H}, \tag{3}$$

где α_0 и H определяются из условий равенства (2) и (3) и их первых производных при $z = 0$, т. е.

$$\alpha_0 = \alpha_{10} + \alpha_{20},$$
$$\frac{\alpha_0}{H} = \frac{\alpha_{10}}{H_1} + \frac{\alpha_{20}}{H_2}. \tag{4}$$

При помощи данных, приведенных в [1], нетрудно вычислить α_0 и H, что и представлено в табл. 1 для волн разной длины.

Таблица 1

Значения α_1, α_2, α_0 и H

λ, *см*	α_1, 1/*м*	α_2, 1/*м*	$\alpha_0 = \alpha_1 + \alpha_2$	H, *м*
10	$0{,}15 \cdot 10^{-5}$	$0{,}005 \cdot 10^{-5}$	$0{,}15 \cdot 10^{-5}$	$5{,}0 \cdot 10^3$
3	$0{,}16 \cdot 10^{-5}$	$0{,}07 \cdot 10^{-5}$	$0{,}23 \cdot 10^{-5}$	$3{,}7 \cdot 10^3$
1,5	$0{,}20 \cdot 10^{-5}$	$1{,}90 \cdot 10^{-5}$	$2{,}10 \cdot 10^{-5}$	$2{,}2 \cdot 10^3$
1,0	$0{,}32 \cdot 10^{-5}$	$1{,}02 \cdot 10^{-5}$	$1{,}34 \cdot 10^{-5}$	$2{,}5 \cdot 10^{-3}$
0,667	$1{,}75 \cdot 10^{-5}$	$0{,}71 \cdot 10^{-5}$	$2{,}45 \cdot 10^{-5}$	$3{,}7 \cdot 10^3$

Коэффициент поглощения является функцией метеопараметров температуры T, давления p и влажности ρ (содержания водяных паров). Эту зависимость вдали от резонансных линий представим в виде [1]

$$\alpha = \beta_1 \frac{p^2}{T^{5/2}} + \rho p \left[\beta_2^{(1)} \frac{e^{-\frac{280}{T}}}{T^2} + \frac{\beta_2^{(2)}}{T^{5/2}} \right], \tag{5}$$

где β_1, $\beta_2^{(1)}$ и $\beta_2^{(2)}$ зависят от внутренних свойств молекул (магнитных и электрических моментов, величин термов и т. п.). В дальнейшем мы будем пользоваться формулой (5), т. е. ограничимся нерезонансными областями частот.

Так как T, p и ρ — случайные величины, то случайной величиной является и α. Среднее значение α известно, и его высотная зависимость определяется из (3). Дисперсия коэффициента поглощения может быть опреде-

лена из (5) путем дифференцирования (так как флуктуации T, p и ρ малы), возведения в квадрат и усреднения. При этом мы предположим, что флуктуации T, p и ρ статистически независимы и происходят адиабатически (флуктуации T и p связаны уравнением адиабаты). Тогда

$$\sigma_\alpha^2 = \overline{\Delta\alpha^2} = (\alpha_2)^2 \frac{\sigma_\rho^2}{(\bar{\rho})^2} + f^2(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2) \frac{\sigma_T^2}{(\bar{T})^2}. \qquad (6)$$

Здесь

$$f(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2) = \frac{\mu}{\mu - 1}(2\bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2) - \frac{5}{2}\bar{\alpha}_1 - \frac{3}{2}\bar{\alpha}_2^{(2)} - \left(\frac{280}{\bar{T}} + 2\right)\bar{\alpha}_2^{(1)}; \qquad (7)$$

$$\bar{\alpha}_1 = \beta_1 \frac{(\bar{p})^2}{(\bar{T})^{5/2}}; \qquad (8)$$

$$\bar{\alpha}_2^{(1)} = \bar{\rho}\bar{p}\beta_2^{(1)} \frac{e^{-\frac{280}{\bar{T}}}}{(\bar{T})^2}; \qquad (9)$$

$$\bar{\alpha}_2^{(2)} = \bar{\rho}\bar{p}\beta_2^{(2)} \frac{1}{(\bar{T})^{3/2}}; \qquad (10)$$

$$\bar{\alpha}_2 = \bar{\alpha}_2^{(1)} + \bar{\alpha}_2^{(2)}; \qquad (11)$$

$\mu = 1{,}41$ — показатель адиабаты воздуха; σ_ρ и σ_T — дисперсии флуктуаций влажности и давления; α_1 характеризует поглощение в кислороде;

Таблица 2

Значения $f(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2)$ ($\bar{T} = 293°$ K, $\bar{\rho} = 7{,}5$ г/м³)

λ, см	10	3	1,5	1,0	0,667
$f(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2)$	$0{,}66 \cdot 10^{-5}$	$0{,}89 \cdot 10^{-5}$	$2{,}18 \cdot 10^{-5}$	$2{,}19 \cdot 10^{-4}$	$8{,}71 \cdot 10^{-5}$

$\alpha_2^{(1)}$ соответствует краю поглощения паров воды вблизи линии 1,35 см, $\alpha_2^{(2)}$ — краям остальных линий поглощения. Эти величины известны [1] и вычисление функции $f(\alpha_1, \alpha_2)$ не составляет большого труда. Например, для $\lambda = 8$ мм, $\rho = 7$ г/м³ и $\bar{T} = 293°$ K имеем $f(\alpha_1, \alpha_2) = 4{,}27 \cdot 10^{-5}$ 1/м. Для остальных длин волн значения приведены в табл. 2.

Из усредненных данных работы [5] следует, что $\sigma_\rho \simeq 0{,}33$ г/м³, а $\sigma_T \simeq 0{,}3°$K. Если взять эти данные за основу, то для $\lambda = 8$ мм, $\bar{\rho} = 7{,}5$ г/м³ и $\bar{T} = 293°$K (эти метеопараметры в дальнейшем мы будем называть стандартными) $\sigma_\alpha/\bar{\alpha} \simeq 1{,}97 \cdot 10^{-2}$. Для остальных длин волн соответствующие сведения даны в табл. 3. Как следует из оценок, для волн длиной $\lambda < 3$ см флуктуации коэффициента поглощения в основном обусловлены флуктуациями влажности. Так как $\bar{\alpha}_1$ и $\bar{\alpha}_2$ убывают с высотой, то σ_α также с высотой убывает. Мы будем предполагать, что это убывание описывается функцией

Таблица 3

Дисперсии коэффициента поглощения ($\bar{T} = 293°$ K, $\bar{\rho} = 7{,}5$ г/м³)

λ, см	$\sigma_\alpha/\bar{\alpha}$
10	$0{,}47 \cdot 10^{-2}$
3	$1{,}36 \cdot 10^{-2}$
1,5	$4{,}00 \cdot 10^{-2}$
1,0	$3{,}36 \cdot 10^{-2}$
0,667	$1{,}30 \cdot 10^{-2}$

$$\sigma_\alpha(z) = \sigma_\alpha(0)\, e^{-z/L} \qquad (12)$$

что, по порядку величин, $L \simeq H$.

Далее предположим, что флуктуации коэффициента поглощения происходят локально изотропно. Это означает, что флуктуации в двух

точках описываются корреляционной функцией вида

$$\overline{\Delta\alpha(\vec{r}_1)\,\Delta\alpha(\vec{r}_2)} = R_\alpha(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \sigma_\alpha\left(\frac{\vec{r}_1+\vec{r}_2}{2}\right)\rho_\alpha(|\vec{r}_2-\vec{r}_1|), \tag{13}$$

где $\rho_\alpha(|\vec{r}_2-\vec{r}_1|)$ — нормированная автокорреляционная функция флуктуаций α. Для простоты мы будем полагать $\rho_\alpha(x)$ в форме Тейлора, т. е.

$$\rho_\alpha(x) = e^{-x/l_\alpha}, \tag{14}$$

где l_α — внешний масштаб флуктуаций *. Естественно предположить, что он равен внешнему масштабу флуктуаций показателя преломления и равен примерно 100 *м*. Заметим также, что так как σ_α является функцией только высоты, то

$$\sigma_\alpha\left(\frac{\vec{r}_1+\vec{r}_2}{2}\right) = \sigma_\alpha\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right). \tag{15}$$

2. СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ КОЭФФИЦИЕНТА ПОГЛОЩЕНИЯ В ОБЛАКАХ

В облаках поглощение электромагнитного излучения в сантиметровом диапазоне волн обусловлено в основном поглощением в водяном паре, который в облаках можно считать насыщенным, и потерями на джоулево тепло в капельках воды. Последнее описывается коэффициентом поглощения [1]

$$\gamma = \int_0^\infty n(a)\,Q(a,\lambda)\,da, \tag{16}$$

где $n(a)da$ — число капель в единице объема, радиусы которых заключены в интервале $[a, a+da]$; $Q(a,\lambda)$ — эффективный поперечник рассеяния. Так как в облаках $a \simeq 7-10$ *мк*, то в сантиметровом диапазоне для $Q(a,\lambda)$ применимо приближение

$$Q(a,\lambda) = \frac{4\pi^2 c a^3}{\lambda}, \tag{17}$$

где коэффициент c зависит от действительной и мнимой частей диэлектрической проницаемости воды. Вычислить этот коэффициент можно на основании данных, приведенных в [1], из которых, например, следует, что для $\lambda = 8$ *мм* и $\overline{T} = 293°$ K величина $c = 0{,}12$. Так как объем шара $V(a)$ пропорционален кубу его радиуса, то формулу (16) можно представить в виде

$$\gamma = \frac{3\pi c}{\lambda}\int_0^\infty n(a)\,V(a)\,da = \frac{3\pi c}{\lambda\tilde{\rho}}W, \tag{18}$$

где W — водность облаков; $\tilde{\rho}$ — плотность воды. Водность облаков порядка 0,5—1,0 *г/м*^{3} [6]. Отсюда для $\lambda = 8$ *мм* следует, что $\gamma \simeq (0{,}7-1{,}4)\cdot 10^{-4}$ 1/*м*. Коэффициент поглощения в водяном паре облаков при стандартных метеопараметрах ($\rho \approx 17$ *г/м*^{3}) равен $\alpha \simeq 3{,}1\cdot 10^{-5}$ 1/*м* для $\lambda = 8$ *мм*. Таким образом, поглощение в капельках облаков превышает поглощение в парах воды.

Дисперсия γ равна, очевидно,

$$\sigma_\gamma = \frac{3\pi c}{\lambda\tilde{\rho}}\sigma_W, \tag{19}$$

* Мы должны были бы при выборе корреляционной функции использовать закон Колмогорова — Обухова. Однако это усложнило бы расчеты, не изменив существенно окончательного результата.

Таблица 4

Коэффициент поглощения в облаке и его флуктуации
($\bar{T} = 293\,^\circ$ K, $\bar{\rho} = 17$ г/м³, $\bar{W} = 0{,}71$ г/см³)

λ, см	$\frac{3\pi c_1}{\lambda}$, 1/м	$\bar{\gamma}$, 1/м	$\bar{\alpha}$, 1/м	$\bar{\beta} = \bar{\alpha} + \bar{\gamma}$
10	0,94	$0{,}0067 \cdot 10^{-4}$	$0{,}016 \cdot 10^{-4}$	$0{,}023 \cdot 10^{-4}$
3	10,1	$0{,}076 \cdot 10^{-4}$	$0{,}032 \cdot 10^{-4}$	$0{,}11 \cdot 10^{-4}$
1,5	42,1	$0{,}30 \cdot 10^{-4}$	$0{,}45 \cdot 10^{-4}$	$0{,}75 \cdot 10^{-4}$
1,0	94,1	$0{,}67 \cdot 10^{-4}$	$0{,}25 \cdot 10^{-4}$	$0{,}93 \cdot 10^{-4}$
0,667	206,0	$1{,}46 \cdot 10^{-4}$	$0{,}34 \cdot 10^{-4}$	$1{,}80 \cdot 10^{-4}$

Таблица 4 (продолжение)

λ, см	$\sigma_{\gamma\lambda}$, 1/м	σ_α, 1/м	σ_β, 1/м	$\sigma_\beta/\bar{\beta}$
10	$0{,}032 \cdot 10^{-5}$	$0{,}0008 \cdot 10^{-5}$	$0{,}032 \cdot 10^{-5}$	0,14
3	$0{,}07 \cdot 10^{-5}$	$0{,}0071 \cdot 10^{-5}$	$0{,}37 \cdot 10^{-5}$	0,34
1,5	$1{,}40 \cdot 10^{-5}$	$0{,}20 \cdot 10^{-5}$	$1{,}41 \cdot 10^{-5}$	0,19
1,0	$3{,}20 \cdot 10^{-5}$	$0{,}12 \cdot 10^{-5}$	$3{,}20 \cdot 10^{-5}$	0,34
0,667	$7{,}0 \cdot 10^{-5}$	$0{,}14 \cdot 10^{-5}$	$7{,}0 \cdot 10^{-5}$	0,37

где σ_W — дисперсия водности. О последней величине, насколько известно, сведений нет, а поэтому трудно сколь-нибудь надежно оценить σ_γ. Однако можно поступить следующим образом. В [6] приведены некоторые данные о высотном распределении средней водности в кучевых облаках. Эти данные будем рассматривать как возможный диапазон значений водности. Тогда $\bar{W} = 0{,}71$ г/м³, а $\sigma_W \simeq 0{,}34$ г/м³. Следовательно, для $\lambda = 8$ мм $\sigma_\gamma = 4{,}8 \cdot 10^{-5}$ 1/м, а $\sigma_\gamma/\bar{\gamma} = 0{,}48$. Данные о $\bar{\gamma}$ и σ_γ для других длин волн приведены в табл. 4.

Суммарный коэффициент поглощения в облаках равен

$$\beta = \alpha + \gamma, \tag{20}$$

а его дисперсия в предположении независимости флуктуаций водности и влажности равна

$$\sigma_\beta^2 = \sigma_\alpha^2 + \sigma_\gamma^2. \tag{21}$$

Далее будем предполагать изотропность флуктуаций β и тейлорову форму нормированной автокорреляционной функции. Однако для радиуса корреляции l_β будем пользоваться оценкой $l_\beta = 10$ м в соответствии с рефрактометрическими измерениями в облаках [10].

3. ЯРКОСТНАЯ ТЕМПЕРАТУРА АНТЕННЫ

Нашей задачей является вычисление яркостной температуры антенны, которую она приобретает под действием теплового излучения атмосферы. Мы рассмотрим общий случай, когда в атмосфере в промежутке высот от h_1 до h_2 имеется облачный слой толщины

$$d = h_2 - h_1. \tag{22}$$

Для этого воспользуемся уравнениями переноса лучистой энергии [8], которые в нашем случае имеют вид

$$\begin{aligned}
&\frac{dI_1}{dz} - \frac{\alpha}{\sin\psi} I_1 = -\frac{2\alpha k T_1}{\lambda^2 \sin\psi} \quad \text{при } 0 < z \leqslant h_1, \\
&\frac{dI_2}{dz} - \frac{\beta}{\sin\psi} I_2 = -\frac{2\beta k T_2}{\lambda^2 \sin\psi} \quad \text{при } h_1 \leqslant z \leqslant h_2, \\
&\frac{dI_3}{dz} - \frac{\alpha}{\sin\psi} I_3 = -\frac{2\alpha k T_3}{\lambda^2 \sin\psi} \quad \text{при } z \geqslant h_2.
\end{aligned} \tag{23}$$

Здесь I_1, I_2, I_3 — интенсивность лучистой энергии в пространстве под облаком, в облаке и над облаком соответственно, T_1, T_2 и T_3 — температура в тех же областях; $k = 1{,}38 \cdot 10^{-16}$ *эрг/град* — постоянная Больцмана; ψ — угол места луча в точке z. Группа уравнений (23) должна быть решена при условиях непрерывности потока электромагнитного излучения на границах облака * и обращения этого потока в нуль при $z \to \infty$. При этих условиях решение имеет вид

$$I_1(z) = \frac{2k}{\lambda^2}\left\{\int_z^{h_1} \frac{T_1(\zeta)\,\alpha(\zeta)\,e^{-\tau(\zeta)}\,d\zeta}{\sin\psi} + e^{\eta(h_1)-\tau(h_1)}\left[\int_{h_1}^{h_2} \frac{T_2(\zeta)\,\beta(\zeta)\,e^{-\eta(\zeta)}\,d\zeta}{\sin\psi} + \right.\right. \tag{24}$$

$$\left.\left. + e^{\tau(h_2)-\eta(h_2)} \int_{h_2}^{\infty} \frac{T_3(\zeta)\,\alpha(\zeta)\,e^{-\tau(\zeta)}\,d\zeta}{\sin\psi}\right]\right\} e^{\tau(z)},$$

где

$$\tau(z) = \int_0^z \frac{\alpha(\zeta)}{\sin\psi}\,d\zeta \tag{25}$$

носит название оптической глубины атмосферы, а

$$\eta(\zeta) = \int_0^z \frac{\beta(\zeta)}{\sin\psi}\,d\zeta \tag{26}$$

— оптической глубины облака. Из (24) следует, что яркостная температура антенны ($z = 0$)

$$T_A = \int_0^{h_1} \frac{T_1(\zeta)\,\alpha(\zeta)\,e^{-\tau(\zeta)}\,d\zeta}{\sin\psi} + e^{\eta(h_1)-\tau(h_1)}\left[\int_{h_1}^{h_2} \frac{T_2(\zeta)\,\rho(\zeta)\,e^{-\eta(\zeta)}\,d\zeta}{\sin\psi} + \right.$$

$$\left. + e^{\tau(h_2)-\eta(h_2)} \int_{h_2}^{\infty} \frac{T_3(\zeta)\,\alpha(\zeta)\,e^{-\tau(\zeta)}\,d\zeta}{\sin\psi}\right]. \tag{27}$$

Для дальнейшего важно то обстоятельство, что, как показывают более подробные вычисления, флуктуации температуры атмосферы и облака не оказывают существенного влияния на флуктуации яркостной температуры антенны. Поэтому в интегралах в формуле (27) T_1, T_2 и T_3 можно заменить их средними значениями. Кроме того, так как температура с высотой меняется очень медленно, то T_1, T_2 и T_3 можно заменить средним значением температуры атмосферы у земной поверхности $\overline{T}_0$. Тогда, учитывая, что $d\tau/dz = \alpha/\sin\psi$ и $d\eta/dz = \beta/\sin\psi$, получим

$$T_A = \overline{T}_0\,(1 - e^{-r}), \tag{28}$$

где

$$r = \eta(h_2) - \eta(h_1) + \tau(h_1) + \tau(\infty) - \tau(h_2) \tag{29}$$

имеет смысл полной оптической глубины. Из (28) следует, что статистические свойства яркостной температуры антенны определяются статистическими характеристиками полной оптической глубины.

4. СРЕДНЕЕ ЗНАЧЕНИЕ ПОЛНОЙ ОПТИЧЕСКОЙ ГЛУБИНЫ

Очевидно, что среднее значение полной оптической глубины

$$\bar{r} = \overline{\eta(h_2) - \eta(h_1)} + \overline{\tau(h_1)} + \overline{\tau(\infty) - \tau(h_2)}. \tag{30}$$

Как показано в работе [3], при углах места $\psi \geqslant 5^\circ$ влиянием рефракции можно пренебречь и считать поэтому угол ψ всюду одинаковым. Кроме того, будем предполагать, что флуктуации в облаке пространственно од-

* Явлениями преломления лучей на границах облака мы пренебрегаем из-за малости эффекта.

нородны. Тогда

$$\overline{\eta(h_2) - \eta(h_1)} = \int_{h_1}^{h_2} \frac{\overline{\beta(\zeta)}\, d\zeta}{\sin\psi} = \frac{\bar{\beta} d}{\sin\psi} \tag{31}$$

с учетом (3)

$$\bar{\tau}(z) = \frac{\bar{\alpha}_0 H}{\sin\psi}\left(1 - e^{-\frac{z}{H}}\right). \tag{32}$$

Если ввести среднюю высоту облака $h = (h_1 + h_2)/2$, то для $\bar{r}$ можно получить

$$\bar{r} = \frac{1}{\sin\psi}\left[\bar{\beta} d + \bar{\alpha}_0 H\left(1 - 2e^{-\frac{h}{H}} \operatorname{sh}\frac{d}{2H}\right)\right]. \tag{33}$$

Заметим, что в отсутствие облака ($d = 0$)

$$\bar{r} = \frac{\bar{\alpha}_0 H}{\sin\psi}. \tag{34}$$

Очень часто реализуется случай, когда $d/2H \ll 1$ и поэтому

$$\bar{r} = \frac{\bar{\beta} d + \bar{\alpha}_0 H}{\sin\psi}. \tag{35}$$

Этой формулой мы и будем пользоваться в дальнейшем.

Оценим величину числителя в (35) для $\lambda = 8$ *мм*. Если взять $H = 10^3$ *м*, то $\bar{\beta} d + \bar{\alpha}_0 H = 0{,}18$.

5. ФЛУКТУАЦИИ ПОЛНОЙ ОПТИЧЕСКОЙ ГЛУБИНЫ

Так как флуктуации под облаком, внутри облака и над облаком можно считать статистически независимыми, то дисперсия полной оптической глубины определяется суммой

$$\sigma_r^2 = \sigma_{\tau(h_1)}^2 + \sigma_{\eta(h_2)-\eta(h_1)}^2 + \sigma_{\tau(\infty)-\tau(h_2)}^2, \tag{36}$$

где

$$\sigma_{\tau(h_1)}^2 = \frac{1}{\sin^2\psi}\int_0^{h_1}\int_0^{h_1} R_\alpha(\zeta, \zeta')\, d\zeta\, d\zeta'; \tag{37}$$

$$\sigma_{\eta(h_2)-\eta(h_1)}^2 = \frac{1}{\sin^2\psi}\int_{h_1}^{h_2}\int_{h_1}^{h_2} R_\beta(\zeta, \zeta')\, d\zeta\, d\zeta'; \tag{38}$$

$$\sigma_{\tau(\infty)-\tau(h_1)}^2 = \frac{1}{\sin^2\psi}\int_{h_2}^{\infty}\int_{h_2}^{\infty} R_\alpha(\zeta, \zeta')\, d\zeta\, d\zeta'. \tag{39}$$

Вычислим сначала $\sigma_{\tau(h_1)}^2$. Для этого воспользуемся формулами (13), (14) и (15). Кроме того, введем в интервале (37) новые переменные:

$$x = \frac{\zeta + \zeta'}{2},\quad y = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1| = \frac{\zeta - \zeta'}{\sin\psi} \tag{40}$$

учтем четность автокорреляционной функции. В результате получим, что

$$\sin\psi\,\sigma_{\tau(h_1)}^2 = 2\int_0^{h_1} \rho_\alpha(y)\, dy \int_{\frac{y\sin\psi}{2}}^{h_1 - \frac{y\sin\psi}{2}} \sigma_\alpha^2(x)\, dx, \tag{41}$$

$\sigma_\alpha^2(x)$ существенно меняется на интервале $x \sim L/2$. На этом же интервале существенно меняется и внутренний интеграл; $\rho_\alpha(y)$ существенно меняется на интервале l_α. Так как $l_\alpha \ll L$, то во внутреннем интеграле можно положить $y = 0$. Кроме того, поскольку обычно $h_1 \gg l_\alpha$, то во внешнем интеграле верхний предел можно положить равным бесконечности. В результате получим

$$\sin\psi\,\sigma_{\tau\,(h_1)}^2 = 2\int_0^{h_1}\sigma_\alpha^2(x)\,dx\int_0^{\infty}\rho_\alpha(y)\,dy. \tag{42}$$

Теперь подставим сюда формулы (12), (14) и получим, что

$$\sigma_{\tau\,(h_1)}^2 = \frac{\sigma_\alpha^2(0)\,l_\alpha L\left(1-e^{-\frac{2h_1}{L}}\right)}{\sin\psi}. \tag{43}$$

Аналогичные вычисления приводят к соотношению

$$\sin\psi\sigma_{\eta\,(h_2)-\eta\,(h_1)}^2 = 2\int_0^{\infty}\rho_\beta(y)\,dy\int_{h_1}^{h_2}\sigma_\beta^2(x)\,dx \tag{44}$$

или

$$\sigma_{\eta\,(h_2)-\eta\,(h_1)}^2 = \frac{2dl_\beta\,\sigma_\beta^2}{\sin\psi}. \tag{45}$$

Для того чтобы вычислить третий член в формуле (36), необходимо в (44) β заменить на α; h_1 на h_2 и h_2 на ∞.

Тогда

$$\sigma_{\tau\,(\infty)-\tau\,(h_2)}^2 = 2\int_0^{\infty}\rho_\alpha(y)\,dy\int_{h_2}^{\infty}\sigma_\alpha^2(x)\,dx. \tag{46}$$

Подставив в последнюю формулу соотношения (12) и (14), получим окончательно

$$\sigma_{\tau\,(\infty)-\tau\,(h_2)}^2 = \frac{\sigma_\alpha^2(0)\,l_\alpha L}{\sin\psi}\,e^{-\frac{2h_2}{L}}. \tag{47}$$

В итоге

$$\sigma_r^2 = \frac{1}{\sin\psi}\left[2dl_\beta\sigma_\beta^2 + \sigma_\alpha^2(0)\,l_\alpha L\left(1-2\,e^{-\frac{2h}{L}}\,\mathrm{sh}\,\frac{d}{L}\right)\right]. \tag{48}$$

Если облака нет ($d = 0$), то

$$\sigma_r^2 = \frac{\sigma_\alpha^2(0)\,l_\alpha L}{\sin\psi}. \tag{49}$$

При наличии облачного слоя первый член в (48) обычно значительно превышает второй, так как $\sigma_\beta^2 \gg \sigma_\alpha^2(0)$. Поэтому при наличии облачного слоя приблизительно

$$\sigma_r^2 = \frac{2dl_\beta\,\sigma_\beta^2}{\sin\psi}. \tag{50}$$

Таблица 5

Значения относительной флуктуации температуры антенны в зависимости от угла места ($\lambda = 8$ *мм*)

$\psi°$	10	20	30	40	50
$\sigma_{T_A}/\bar{T}_A$	$1{,}21\cdot10^{-3}$	$1{,}86\cdot10^{-3}$	$2{,}32\cdot10^{-3}$	$2{,}67\cdot10^{-3}$	$2{,}92\cdot10^{-3}$

Таблица 5 (продолжение)

$\psi°$	60	70	80	90
$\sigma_{T_A}/\bar{T}_A$	$3{,}14\cdot10^{-3}$	$3{,}26\cdot10^{-3}$	$3{,}33\cdot10^{-3}$	$3{,}36\cdot10^{-3}$

Для волны $\lambda = 8$ *мм* и $d = 10^3$ *м*

$$\sigma_r^2 = \frac{4{,}06\cdot10^{-5}}{\sin\psi}.$$

Отсюда для этой же волны

$$\frac{\sigma_r^2}{r} \approx 2{,}26\cdot10^{-4} \ll 1. \tag{51}$$

6. ФЛУКТУАЦИИ ЯРКОСТНОЙ ТЕМПЕРАТУРЫ АНТЕННЫ

Неравенство (51) позволяет считать, что $e^{-\bar{r}} \simeq e^{-\bar{r}}$ и $\sigma_{e^{-r}} \simeq \sigma_r e^{-\bar{r}}$. Поэтому для среднего значения яркостной температуры антенны справедлива известная формула

$$\bar{T}_A = \bar{T}_0(1 - e^{-\bar{r}}). \tag{52}$$

Дисперсия яркостной температуры антенны равна

$$\sigma_{T_A} = \bar{T}_0 \sigma_r e^{-\bar{r}}. \tag{53}$$

Наконец, относительная дисперсия

$$\frac{\sigma_{T_A}}{\bar{T}_A} = \frac{\sigma_r}{e^{\bar{r}} - 1}. \tag{54}$$

Далее удобнее отдельно рассмотреть случаи свободной от облаков атмосферы и атмосферы с облачным слоем.

В первом случае для σ_r необходимо воспользоваться формулой (49). Тогда

$$\frac{\sigma_{T_A}}{\bar{T}_A} = \frac{\sigma_\alpha(0)\sqrt{l_\alpha L}}{\sqrt{\sin\psi}\,(e^{\bar{r}} - 1)}. \tag{55}$$

В дальнейшем будем считать, что $L = H$. Если $\bar{r} \ll 1$, что бывает весьма часто, то

$$\frac{\sigma_{T_A}}{\bar{T}_A} \simeq \frac{\sigma_\alpha(0)}{\bar{\alpha}_0}\sqrt{\frac{l_\alpha}{H}\sin\psi}. \tag{56}$$

В качестве примера применимости полученных формул мы вычислим относительную дисперсию температуры антенны при различных углах места для волн диапазона 8 *мм*. Результаты этих расчетов приведены в табл. 5.

В случае, когда в атмосфере присутствует облачный слой, необходимо воспользоваться формулой (50) для σ_r. В этом случае

$$\frac{\sigma_{T_A}}{\bar{T}_A} \sqrt{\frac{2\,dl_\beta}{\sin\psi}}\,\frac{\sigma_\beta}{e^{\bar{r}} - 1}. \tag{57}$$

Таблица 6

Значения относительных флуктуаций температуры антенны в зависимости от угла места при различных значениях толщины облаков (λ=8 *мм*, $\overline{T}$=293 °К, $\overline{W}$=0,71 *г/м*^{3}, $\bar{\rho}$=17,0 *г/м*^{3})

$\psi°$	d, *м*					
	100	200	500	1000	1500	2000
10	$0{,}98\cdot10^{-2}$	$1{,}18\cdot10^{-2}$	$1{,}17\cdot10^{-2}$	$0{,}91\cdot10^{-2}$	$0{,}68\cdot10^{-2}$	$0{,}51\cdot10^{-2}$
20	$1{,}71\cdot10^{-2}$	$1{,}91\cdot10^{-2}$	$1{,}95\cdot10^{-2}$	$1{,}70\cdot10^{-2}$	$1{,}43\cdot10^{-2}$	$1{,}20\cdot10^{-2}$
30	$2{,}12\cdot10^{-2}$	$2{,}56\cdot10^{-2}$	$2{,}54\cdot10^{-2}$	$2{,}23\cdot10^{-2}$	$1{,}96\cdot10^{-2}$	$1{,}69\cdot10^{-2}$
40	$2{,}38\cdot10^{-2}$	$2{,}91\cdot10^{-2}$	$2{,}16\cdot10^{-2}$	$2{,}66\cdot10^{-2}$	$2{,}37\cdot10^{-2}$	$2{,}10\cdot10^{-2}$
50	$2{,}53\cdot10^{-2}$	$3{,}18\cdot10^{-2}$	$3{,}48\cdot10^{-2}$	$2{,}97\cdot10^{-2}$	$2{,}66\cdot10^{-2}$	$2{,}27\cdot10^{-2}$
60	$2{,}71\cdot10^{-2}$	$3{,}37\cdot10^{-2}$	$3{,}76\cdot10^{-2}$	$3{,}48\cdot10^{-2}$	$2{,}85\cdot10^{-2}$	$2{,}55\cdot10^{-2}$
70	$2{,}80\cdot10^{-2}$	$3{,}49\cdot10^{-2}$	$3{,}98\cdot10^{-2}$	$3{,}64\cdot10^{-2}$	$3{,}04\cdot10^{-2}$	$2{,}75\cdot10^{-2}$
80	$2{,}90\cdot10^{-2}$	$3{,}61\cdot10^{-2}$	$3{,}98\cdot10^{-2}$	$3{,}82\cdot10^{-2}$	$3{,}10\cdot10^{-2}$	$2{,}76\cdot10^{-2}$
90	$2{,}90\cdot10^{-2}$	$3{,}61\cdot10^{-2}$	$3{,}98\cdot10^{-2}$	$3{,}82\cdot10^{-2}$	$3{,}10\cdot10^{-2}$	$2{,}76\cdot10^{-2}$

При $\bar{r} \ll 1$ можно воспользоваться формулой (35) и написать

$$\frac{\sigma_{T_A}}{\overline{T}_A} = \frac{\sigma_\beta \sqrt{2\, dl_\beta \sin\psi}}{\bar{\beta} d + \bar{\alpha}_0 H}. \tag{58}$$

В табл. 6 даны рассчитанные значения дисперсии яркостной температуры антенны в функции угла места при различных значениях толщины облачного слоя для λ = 8 *мм*. Из сравнения данных этой таблицы с данными табл. 5 видно, что наличие облачного слоя на порядок увеличивает интенсивность флуктуаций теплового излучения атмосферы по сравнению со свободной атмосферой.

7. УГЛОВАЯ КОРРЕЛЯЦИЯ ФЛУКТУАЦИЙ ЯРКОСТНОЙ ТЕМПЕРАТУРЫ АНТЕННЫ

Среднее значение яркостной температуры антенны и интенсивность флуктуаций температуры являются функциями угла места. Поэтому определенный интерес представляет изучение корреляционных соотношений между флуктуациями теплового излучения атмосферы, поступающего в антенну с различных направлений.

Пусть два луча, распространяющиеся под углами места ψ_1 и ψ_2 и азимутами φ_1 и φ_2, попадают в две соответствующие антенны. Тогда температура первой антенны будет по (28)

$$T_A(\psi_1, \varphi_1) = \overline{T}_0 [1 - e^{-r(\psi_1, \varphi_1)}]$$

и второй

$$T_A(\psi_2, \varphi_2) = \overline{T}_0 [1 - e^{-r(\psi_2, \varphi_2)}].$$

Соответственно корреляционная функция

$$R_{T_A}(\psi_1, \varphi_1; \psi_2, \varphi_2) = (\overline{T}_0)^2 R_r(\psi_1, \varphi_1; \psi_2, \varphi_2)\, e^{-r(\psi_1, \varphi_1) - r(\psi_2, \varphi_2)}, \tag{59}$$

где

$$R_r(\psi_1, \varphi_1; \psi_2, \varphi_2) = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{R_\alpha(\zeta, \zeta')}{\sin\psi_1 \sin\psi_2}\, d\zeta\, d\zeta' \tag{60}$$

является нормированной корреляционной функцией флуктуаций яркостной температуры антенны. Для $R_\alpha(\zeta, \zeta')$ воспользуемся формулами (13) — (15). Основная трудность последующих вычислений заключается

в том, что теперь $|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$ не пропорционально $\zeta - \zeta'$, а определяется формулой

$$|\vec{r}_2 - \vec{r}_1| = \frac{\sqrt{\sin^2\psi_2\zeta^2 + \sin^2\psi_1\zeta'^2 - 2\zeta\zeta'\sin\psi_1\sin\psi_2\cos\theta}}{\sin\psi_1\sin\psi_2}, \tag{61}$$

где

$$\cos\theta = \sin\psi_1\sin\psi_2 + \cos\psi_1\cos\psi_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1); \tag{62}$$

θ — угол между лучами.

Для преодоления этой трудности сначала представим (60) в виде

$$\sin\psi_1\sin\psi_2 R_r(\psi_1, \varphi_1; \psi_2, \varphi_2) = \int_0^\infty \int_0^\zeta R_\alpha(\zeta, \zeta')\,d\zeta\,d\zeta' + \int_0^{\zeta'} \int_0^\infty R_\alpha(\zeta, \zeta')\,d\zeta\,d\zeta', \tag{63}$$

затем введем новые переменные

$$x = \frac{\zeta + \zeta'}{2}, \tag{64}$$

$$y = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|.$$

Получим в результате

$$R_r(\psi_1, \varphi_1; \psi_2, \varphi_2) = 2\int_0^\infty y\rho_\alpha(y)\,dy \left\{ \int_{\frac{y\sin\psi_1}{2}}^{\frac{y\sin\psi_1\sin\psi_2}{A_1}} \frac{\sigma_\alpha^2(x)\,dx}{\sqrt{A_2^2y^2 - 4x^2\sin^2\theta}} + \right.$$

$$\left. + \int_{\frac{y\sin\psi_2}{2}}^{\frac{y\sin\psi_1\sin\psi_2}{A_1}} \frac{\sigma_\alpha^2(x)\,dx}{\sqrt{A_2^2y^2 - 4x^2\sin^2\theta}} \right\},$$

где

$$A_1 = \sqrt{\sin^2\psi_1 + \sin^2\psi_2 - 2\sin\psi_1\sin\psi_2\cos\theta};$$

$$A_2 = \sqrt{\sin^2\psi_1 + \sin^2\psi_2 + 2\sin\psi_1\sin\psi_2\cos\theta}. \tag{66}$$

Как показывает более тщательный расчет, нижние пределы во внутренних интегралах можно положить равными нулю и объединить эти интегралы в один. Если теперь ввести новую переменную

$$S = \frac{2x\sin\theta}{A_2 y}, \tag{67}$$

то внутренний интеграл не будет зависеть от y. Тогда с учетом (12) и (14) первый интеграл без особого труда может быть взят и в итоге получается

$$R_r(\psi_1, \varphi_1; \psi_2, \varphi_2) = \frac{2\sigma_\alpha^2(0)}{\sin\theta} \int_0^{\frac{2\sin\psi_1\sin\psi_2\sin\theta}{A_1A_2}} \frac{dS}{\left(\frac{1}{l_\alpha} + pS\right)^2\sqrt{1 - S^2}}, \tag{68}$$

где

$$p = \frac{A_2}{L\sin\theta}. \tag{69}$$

Заметим, что последняя формула справедлива лишь для безоблачной атмосферы. Мы ограничимся рассмотрением этого случая. Последний интеграл может быть вычислен при помощи подстановки $S = \sin t$ [9]. Получим

$$R_r(\psi_1, \varphi_1; \psi_2, \varphi_2) = \frac{2\sigma_\alpha^2(0)\, l_\alpha L}{A_2(1-q^2)} \left\{ 1 - \frac{q \cos t_0}{9 + \sin t_0} + \right.$$

$$\left. + \frac{q^2}{\sqrt{1-q^2}} \ln \left[\frac{q + \operatorname{tg}\frac{t_0}{2} - \operatorname{tg}\frac{t_0}{2}\sqrt{1-q^2}}{q + \operatorname{tg}\frac{t_0}{2} + \operatorname{tg}\frac{t_0}{2}\sqrt{1-q^2}} \right] \right\}, \tag{70}$$

где

$$\sin t_0 = \frac{2 \sin\theta \sin\psi_1 \sin\psi_2}{A_1 A_2}, \tag{71}$$

$$q = \frac{L \sin\theta}{l_\alpha A_2}. \tag{72}$$

Формула (70) применима при $q < 1$. При $q = 1$ из нее предельным переходом можно получить

$$R_r = \frac{4}{3} \frac{\sigma_\alpha^2(0)\, l_\alpha L}{A_2} \left[1 - \frac{1 - \operatorname{tg}^3 \frac{t_0}{2}}{\left(1 + \operatorname{tg}\frac{t_0}{2}\right)^3} \right]. \tag{73}$$

При $q > 1$ логарифм удобнее заменить арктангенсом

$$R_r(\psi_1, \varphi_1; \psi_2, \varphi_2) = \frac{2\sigma_\alpha^2(0)\, l_\alpha L}{A_2(a^2-1)} \left\{ \frac{q \cos t_0}{q + \sin t_0} + \frac{2q^2}{\sqrt{q^2-1}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg}\frac{t_0}{2}\sqrt{q^2-1}}{q + \operatorname{tg}\frac{t_0}{2}} - 1 \right\} \tag{74}$$

Рассмотрим теперь частные случаи азимутальной корреляции и корреляции по углу места. В первом случае $\psi_1 = \psi_2 = \psi$ и $t_0 = \pi/2$. Поэтому

$$R_r(\varphi_1; \varphi_2) = \frac{2\sigma_\alpha^2(0)\, l_\alpha L}{A_2(1-q^2)} \left\{ 1 + \frac{q^2}{\sqrt{1-q^2}} \ln \left[\frac{q + 1 - \sqrt{1-q^2}}{q + 1 + \sqrt{1-q^2}} \right] \right\} \text{ при } q < 1 \tag{75}$$

$$R_r(\varphi_1, \varphi_2) = \frac{4}{3} \frac{\sigma_\alpha^2(0)\, l_\alpha L}{A_2} \quad \text{при } q = 1; \tag{76}$$

$$R_r(\varphi_1, \varphi_2) = \frac{2\sigma_\alpha^2(0)\, l_\alpha L}{A_2(q^2-1)} \left\{ \frac{2q^2}{\sqrt{q^2-1}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{q^2-1}}{q+1} - 1 \right\} \text{ при } q > 1. \tag{77}$$

Оценки показывают, что в диапазоне волн 8 *мм* при изменении угла места от 10 до 45° угловой радиус азимутальной корреляции меняется приблизительно от 2,5 до 15,5°. При этом под угловым радиусом корреляции мы понимаем такое значение углового разноса между лучами, при котором корреляционная функция уменьшается втрое по сравнению с ее значением при угловом разносе, равном нулю.

В случае корреляции по углу места $\varphi_1 = \varphi_2$ и $t_0 = \psi$, где $\psi = (\psi_1 + \psi_2)/2$, если угловой разнос невелик. В этом случае угловой радиус корреляции при изменении угла места от 20 до 80° меняется приблизительно от 1 до 11,5°.

ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ

1. Относительные флуктуации яркостной температуры антенны, регистрирующей тепловое излучение атмосферы, порядка 10^{-2}— 10^{-3} пропорциональны интенсивности флуктуаций коэффициента поглощения и падают с уменьшением угла места.

2. Эти флуктуации должны резко возрастать при наличии в атмосфере облаков.

3. Угловой радиус корреляции по азимуту и углу места растет с увеличением угла места.

ЛИТЕРАТУРА

1. Распространение ультракоротких радиоволн, перев. с англ., под ред. Б. А. Шиллерова, Изд. Советское радио, 1954.
2. С. А. Жевакин, В. С. Троицкий, Н. М. Цейтлин, Изв. вузов МВО СССР (Радиофизика), 1958, **1**, 2.
3. С. А. Жевакин, В. С. Троицкий. Радиотехника и электроника, 1959, **4**, 1, 21.
4. А. Е. Саломонович, О. М. Атаев, Изв. вузов МВО СССР (Радиофизика), 1960, **3**, 4.
5. E. E. Gossard, IRE Trans., 1960, **AP-8**, 2.
6. А. Х. Хргиан, Физика атмосферы, ГИМФЛ, 1958.
7. К. С. Станкевич, Изв. вузов МВО СССР (Радиофизика), 1960, **3**, 6, 968.
8. В. В. Соболев, Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет, ГИТТЛ, 1956.
9. Г. Б. Двайт, Таблицы интегралов, ИЛ, 1948.
10. C. M. Crain. Proc. I. R. E., 1955, **43**, 10.

Поступила в редакцию
27 IV 1961

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩИХСЯ ПАРАМЕТРОВ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

В. Н. Яковлев

Рассмотрена возможность применения метода медленно меняющихся параметров для исследования нелинейных автоколебательных систем с запаздыванием. Эффективность предложенного в работе метода иллюстрируется на примере анализа высокочастотного автогенератора с запаздыванием.

ВВЕДЕНИЕ

Автоколебательные нелинейные системы с запаздыванием находят все более широкое применение в радиотехнике. К ним следует отнести генераторы импульсов с запаздывающей обратной связью и высокочастотные генераторы с запаздыванием. Некоторые вопросы теории генераторов импульсов с запаздыванием рассмотрены в работе [6].

Вопросы теории высокочастотных автогенераторов с запаздывающей обратной связью наиболее полное освещение получили в работах [1, 2]. Отказавшись от учета деталей вольтамперной характеристики усилительного элемента генератора и представив его в виде идеального ограничителя, автор этих работ избежал необходимость решения нелинейного дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом и достаточно просто, наглядно и вместе с тем вполне строго исследовал стационарный режим работы автогенератора с запаздыванием и механизм его установления.

В настоящей работе анализ автогенератора с запаздывающей обратной связью предлагается вести путем исследования нелинейного дифференциально-разностного уравнения генератора, полученного с учетом реальной вольтамперной характеристики его нелинейного элемента.

В связи с этим на базе метода медленно меняющихся амплитуд (метода ван-дер-Поля [3, 4, 5]) разработан метод количественного анализа нелинейных систем с запаздыванием. Этот метод применительно к системам, настолько близким к линейной консервативной системе, что в пределах конкретной технической задачи можно отвлечься от искажений формы генерируемых колебаний, позволяет обнаружить многочастотность колебаний в системах с запаздыванием, а также определить частоту и амплитуду колебаний в стационарном режиме.

1. МЕТОД МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩИХСЯ ПАРАМЕТРОВ ДЛЯ АНАЛИЗА НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Перейдем к рассмотрению сущности предлагаемого метода исследования нелинейных систем с запаздывающей обратной связью.

Пусть нелинейная автоколебательная система с запаздыванием описывается уравнением вида

$$\ddot{u}(t) + 2\delta\dot{u}(t) - 2q\dot{u}(t-\tau) + \omega_0^2 u(t) = \mu f[u(t), \dot{u}(t), u(t-\tau), \ddot{u}(t-\tau)], \quad (1)$$

где τ — время задержки; $\mu > 0$ — безразмерная величина, малая по сравнению с единицей. Здесь и ниже операция дифференцирования обозначается точками

$$\dot{u}(t) = \frac{du}{dt}, \quad \dot{u}(t-\tau) = \frac{du}{dt}(t-\tau) \quad \text{и т. д.}$$

Уравнение автогенератора почти гармонических колебаний без запаздывания, как известно, имеет вид

$$\ddot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = \mu f[u(t), \dot{u}(t)]. \qquad (2)$$

Определение интеграла уравнения (2) при помощи известных методов анализа нелинейных систем, близких к линейным [3], например при помощи метода медленно меняющихся амплитуд (метода ван-дер-Поля), производится следующим образом. Сначала находят решение уравнения (2) при $\mu = 0$ (порождающее решение). Затем учитывают влияние на это решение правой части уравнения (2) при $\mu > 0$. Это влияние, как известно, сводится к появлению обертонов, зависимости мгновенной частоты от амплитуды колебаний. Учет правой части уравнения (2) вместе с тем дает возможность определить амплитуду и частоту стационарных колебаний, а также закон их установления. Попытаемся аналогичным образом поступить и с уравнением (1), левая часть которого содержит все линейные члены уравнения системы как с запаздывающим аргументом, так и без него. Рассмотрение уравнения (1) именно в таком виде вызывается необходимостью определить частоты всех возможных колебаний в линеаризованной (при $\mu = 0$) системе с запаздыванием.

Когда рассматриваемая система второго порядка близка к линейной, естественно предположить, что интеграл уравнения (1) при $\mu > 0$ незначительно отличается от интеграла уравнения (1) при $\mu = 0$. Это обстоятельство дает возможность, как и в случае уравнения (2), найти сначала решение уравнения (1) при $\mu = 0$ (порождающее решение), а затем учесть влияние правой части (1) на это решение.

Перейдем теперь к определению периодических решений уравнения (1) при $\mu = 0$

$$\ddot{u}(t) + 2\delta\dot{u}(t) - 2q\dot{u}(t-\tau) + \omega_0^2 u(t) = 0. \qquad (3)$$

Для того чтобы найти периодические решения уравнения (3), поступаем при помощи метода гармонической линеаризации Крылова и Боголюбова [4, 7] эквивалентную для установившегося режима замену функции с запаздыванием $\dot{u}(t-\tau)$ функцией без запаздывания вида

$$\dot{u}(t-\tau) = a_1\dot{u}(t) + a_2\ddot{u}(t), \qquad (4)$$

где a_1 и a_2 — неизвестные пока коэффициенты.

Учтем теперь, что в первом приближении величина $\dot{u}(t)$ изменяется по гармоническому закону:

$$\dot{u}(t) = a\cos\omega t, \quad \ddot{u}(t) = -a\omega\sin\omega t. \qquad (5)$$

После подстановки (5) в (4) при помощи формулы косинуса разности двух углов получим

$$a_1 = \cos\omega\tau, \quad a_2 = -\frac{\sin\omega\tau}{\omega}. \qquad (6)$$

Уравнение (3) с учетом (4) и (6) перепишем следующим образом:

$$\ddot{u}(t) + \frac{2\delta - 2q\cos\omega\tau}{1 + \frac{2q}{\omega}\sin\omega\tau}\dot{u}(t) + \frac{\omega_0^2}{1 + \frac{2q}{\omega}\sin\omega\tau}u(t) = 0. \qquad (7)$$

Система, описываемая уравнением (7), будет находиться на границе устойчивости и в ней будут существовать незатухающие периодические колебания, если

$$2q\cos\omega\tau - 2\delta = 0. \qquad (8)$$

Частота периодических колебаний определяется по формуле

$$\omega^2 = \frac{\omega_0^2}{1 + \frac{2q}{\omega}\sin\omega\tau}, \qquad (9)$$

откуда

$$\sin \omega\tau = \frac{\omega_0^2}{2q\omega} - \frac{\omega}{2q}. \qquad (10)$$

Частоты периодических колебаний можно определить графическим решением трансцендентного относительно ω уравнения (10). Для этого уравнение (10) представим в виде

$$\sin \omega\tau = \frac{\omega_0^2 \tau}{2q\omega\tau} - \frac{\omega\tau}{2q\tau} = p_1 - p_2. \qquad (11)$$

Первое слагаемое p_1 правой части уравнения (11) есть равносторонняя гипербола, асимптотами которой являются оси p и $\omega\tau$ (рис. 1), а второе — прямая p_2. Частоты периодических решений определяются абсциссами некоторых точек пересечения (рис. 1) кривой зависимости $p_1 - p_2 = \varphi(\omega\tau)$ с синусоидой. Точки пересечения, как видно из рис. 1, имеются в первой, второй, четвертой, шестой и т. д. четвертях. Однако будут иметь место лишь колебания с частотами, для которых (при $2q > 0$, $2\delta > 0$) согласно (8) выполняется неравенство $\cos \omega\tau > 0$, а согласно [10] — $\omega > \omega_0$. Отсюда на основании (9) имеем

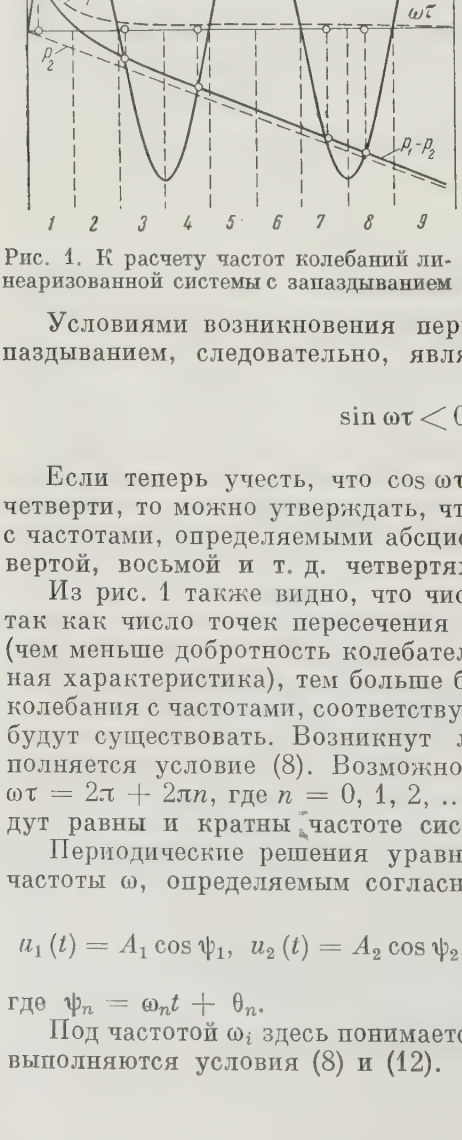


Рис. 1. К расчету частот колебаний линеаризованной системы с запаздыванием

$$\sin \omega\tau < 0,$$

$$1 + \frac{2q}{\omega} \sin \omega\tau > 0.$$

Условиями возникновения периодических колебаний в системе с запаздыванием, следовательно, являются

$$\sin \omega\tau < 0, \quad \cos \omega\tau > 0. \qquad (12)$$

Если теперь учесть, что $\cos \omega\tau > 0$ и $\sin \omega\tau < 0$ лишь в четвертой четверти, то можно утверждать, что могут существовать колебания лишь с частотами, определяемыми абсциссами точек пересечения (рис. 1) в четвертой, восьмой и т. д. четвертях.

Из рис. 1 также видно, что число возможных колебаний ограничено, так как число точек пересечения конечно. Чем больше коэффициент 2δ (чем меньше добротность колебательной системы и чем шире ее резонансная характеристика), тем больше будет точек пересечения. Однако не все колебания с частотами, соответствующими указанным точкам пересечения, будут существовать. Возникнут лишь те колебания, для которых выполняется условие (8). Возможно также явление авторезонанса, когда $\omega\tau = 2\pi + 2\pi n$, где $n = 0, 1, 2, \ldots$. В этом случае частоты колебаний будут равны и кратны частоте системы ω_0.

Периодические решения уравнения (3), соответствующие значениям частоты ω, определяемым согласно (11), имеют вид

$$u_1(t) = A_1 \cos \psi_1, \; u_2(t) = A_2 \cos \psi_2, \ldots u_n(t) = A_n \cos \psi_n, \ldots u_i(t) = A_i \cos \psi_i$$

где $\psi_n = \omega_n t + \theta_n$.

Под частотой ω_i здесь понимается наивысшая частота, при которой еще выполняются условия (8) и (12).

Амплитуды A_n и фазы θ_n являются постоянными во времени величинами, зависящими от начальных условий.

Общее решение уравнения (3) согласно теореме Шмидта [7, 8] равно сумме частных решений:

$$u(t) = \sum_{n=1}^{i} A_n \cos \psi_n. \tag{13}$$

На основании теоремы существования и единственности [9] можно утверждать, что если уравнение (1) имеет периодическое решение (13) при $\mu = 0$, то в случае выполнения условия $|\mu| < \mu_0$, где μ_0 — некоторая положительная постоянная, существует и при том единственное решение $u(t, \mu)$.

Переходим теперь к определению $u(t, \mu)$, являющегося решением уравнения

$$\ddot{u}(t) + \omega^2 u(t) = \mu F[u(t), \dot{u}(t), u(t-\tau), \dot{u}(t-\tau)], \tag{14}$$

полученного из (1) и (7).

Функция $F(t, \tau)$ в правой части уравнения (14) отличается от функции $f(t, \tau)$ уравнения (1) наличием перенесенного из левой части уравнения (7) члена

$$\frac{2\delta - 2q\cos\omega\tau}{1 + \frac{2q}{\omega}\sin\omega\tau}\dot{u}(t),$$

в линеаризованной системе при выполнении условия (8), равного нулю.

Исследование уравнения (3), описывающего линеаризованную систему с запаздыванием, позволяет прийти к выводу о том, что при рассмотрении линейной проблемы мы имеем дело с большим числом частот самовозбуждающихся колебаний. Однако на практике в нелинейных системах с запаздыванием, в силу «дискриминации малого сигнала» [1, 11], наблюдается лишь колебание с одной частотой, имеющее максимальную амплитуду. Только при некоторых условиях в системах с несколькими резонансами могут возникнуть колебания с несколькими частотами [1]. Поэтому в случае одноконтурной системы, которую мы рассматриваем, решение уравнения (14) при $\mu = 0$ запишем как

$$u(t) = A\cos\psi, \tag{15}$$

$$\dot{u}(t) = -\omega A \sin\psi. \tag{16}$$

При этом следует иметь в виду, что при симметричной резонансной характеристике существует лишь колебание, частота которого наиболее близка к частоте ω_0.

Решение уравнения (14) при $\mu > 0$ будем, как и при $\mu = 0$, искать в виде

$$u(t) = A\cos\psi = A\cos(\omega t + \theta), \tag{17}$$

где A и θ являются теперь не постоянными, а некоторыми функциями времени.

Уравнение (17) будем теперь рассматривать как некоторую замену переменных; A и θ — амплитуду и фазу колебания — примем за новые неизвестные функции времени, после определения которых на основании (17) можно найти и искомую функцию $u(t)$. Продифференцировав уравнение (17) по времени, получим

$$\dot{u}(t) = \dot{A}(t)\cos\psi - A(t)\dot{\theta}(t)\sin\psi - \omega A\sin\psi. \tag{18}$$

Принимая во внимание (16), из (18) имеем уравнение

$$\dot{A}(t)\cos\psi - A(t)\dot{\theta}(t)\sin\psi = 0. \tag{19}$$

Дифференцирование (17) дает

$$\ddot{u}(t) = -\omega\dot{A}(t)\sin\psi - \omega A(t)\dot{\theta}(t)\cos\psi - \omega^2 A\cos\psi. \tag{20}$$

Подставляя теперь в уравнение (14) значения $u(t)$, $\dot{u}(t)$ и $\ddot{u}(t)$, определяемые формулами (15), (16) и (20), найдем

$$-\omega\dot{A}(t)\sin\psi - \omega A(t)\dot{\theta}(t)\cos\psi = \mu F[A\cos\psi, -\omega A\sin\psi, A\cos(\psi-\omega\tau), -\omega A\sin(\psi-\omega\tau)]. \tag{21}$$

Решая (19) и (21) относительно $\dot{A}$ и $\dot{\theta}$, получим

$$\dot{A}(t) = -\frac{\mu}{\omega}F[A\cos\psi, -\omega A\sin\psi, A\cos(\psi-\omega\tau), -\omega A\sin(\psi-\omega\tau)]\sin\varphi, \tag{22}$$

$$\dot{\theta}(t) = -\frac{\mu}{\omega A}F[A\cos\psi, -\omega A\sin\psi, A\cos(\psi-\omega\tau), -\omega A\sin(\psi-\omega\tau)]\cos\psi. \tag{23}$$

Уравнения (22) и (23) первого порядка в своих правых частях имеют периодически меняющиеся величины. Производные $\dot{A}$ и $\dot{\theta}$ по времени пропорциональны малому параметру μ. По этой причине амплитуду $A(t)$ и фазу $\theta(t)$ колебания, как и в случае нелинейных систем без запаздывания, можно считать медленно меняющимися функциями времени. Таким образом, функции $A(t)$ и $\theta(t)$ при решении уравнений (22) и (23) в пределах одного периода $2\pi/\omega$ можно считать постоянными, а при определении величин $\dot{A}(t)$ и $\dot{\theta}(t)$ при помощи этих уравнений вместо мгновенных значений функций $F\sin\psi$ и $F\cos\psi$ брать средние за период значения этих функций. Тогда, переходя к полной фазе колебаний $\psi = \omega t + \theta$, взамен (22) и (23) имеем

$$\dot{A}(t) = -\frac{\mu}{2\pi\omega}\int_0^{2\pi} F[A\cos\psi, -\omega A\sin\psi, A\cos(\psi-\omega\tau), -\omega A\sin(\psi-\omega\tau)]\sin\psi d\psi, \tag{24}$$

$$\dot{\theta}(t) = \omega - \frac{\mu}{2\pi\omega A}\int_0^{2\pi} F[A\cos\varphi, -\omega A\sin\psi, A\cos(\psi-\omega\tau), -\omega A\sin(\psi-\omega\tau)]\cos\psi d\psi. \tag{25}$$

Выражения (24) и (25) отличаются от аналогичных выражений для случая нелинейных систем без запаздывания наличием лишь в подынтегральных выражениях членов с запаздывающим аргументом.

Положив $\dot{A}(t) = 0$ и $\dot{\psi}(t) = 0$, при помощи (24) и (25) легко определить приближенные значения амплитуды и частоты установившегося в системе колебания.

Для получения уравнений второго приближения, определяющих A и θ с точностью до величины второго порядка малости включительно, можно воспользоваться рекомендациями, данными в работе [4].

2. АНАЛИЗ АВТОГЕНЕРАТОРА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

В качестве примера применения метода проведем анализ автогенератора с контуром в цепи сетки лампы и линией задержки (рис. 2). Согласно принятым на рис. 2 обозначениям, в случае пренебрежения анодной реакцией лампы, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} C\dot{u} + i_L + i &= 0, \\ L\dot{i}_L + r i_L &= u - M\dot{i}_a, \\ i_a &= S(u_g)\, u_g, \end{aligned} \tag{26}$$

где $S(u_g)$ — крутизна анодно-сеточной характеристики лампы, зависящая от напряжения на сетке; M — коэффициент взаимной индукции.

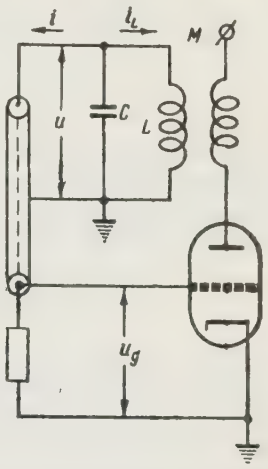


Рис. 2. Принципиальная схема высокочастотного автогенератора с запаздыванием

Будем считать, что линия задержки обладает идеальными амплитудно-частотной и фазо-частотной характеристиками и со стороны сетки лампы согласована. Тогда

$$u_g = u(t-\tau), \quad u = i\rho, \tag{27}$$

где τ — время задержки; ρ — волновое сопротивление линии.

Решая систему уравнений (26) и (27) относительно u, при $\rho \gg r$ получим следующее нелинейное дифференциально-разностное уравнение генератора:

$$LC\,\ddot{u}(t) + \left(\frac{L}{\rho} + rC\right)\dot{u}(t) - S[u(t-\tau)]\,M\dot{u}(t-\tau) + u(t) = 0. \tag{28}$$

Для определенности зависимость динамической крутизны анодно-сеточной характеристики от сеточного напряжения $u_g(t) = u(t-\tau)$ в случае, когда рабочая точка выбрана вблизи точки максимальной крутизны, представим в упрощенном виде [5]:

$$S[u(t-\tau)] = S_0 - S_2 u^2(t-\tau). \tag{29}$$

Этот случай, как известно, соответствует мягкому режиму работы генератора.

При подстановке (29) в (28) с учетом (4), (5) и (6) приходим к уравнению вида (14):

$$\ddot{u}(t) + \omega^2 u(t) = -\mu\left[\frac{S_2\omega_0}{S_0}\,\dot{u}(t-\tau)\,u^2(t-\tau) + \frac{1}{\mu}\,\frac{2\delta - 2q\cos\omega\tau}{1 + \frac{2q}{\omega}\sin\omega\tau}\,\dot{u}(t)\right], \tag{30}$$

где

$$2\delta = \omega_0^2\left(\frac{L}{\rho} + rC\right);\quad 2q = \omega_0^2 S_0 M;\quad \mu = S_0 M\omega_0;$$

$$\omega^2 = \frac{\omega_0^2}{1 + \frac{\omega_0^2 S_0 M}{\omega}\sin\omega\tau}. \tag{31}$$

Имея в виду, что искомое решение $u(t) = A\cos\psi$, при помощи (24) получим

$$\dot{A}(t) = -\frac{\mu A^3\omega_0 S_2}{2\pi S_0}\int_0^{2\pi}\sin(\psi-\omega\tau)\cos^2(\psi-\omega\tau)\sin\psi\,d\psi - \\ -\frac{A}{2\pi}\frac{2\delta-2q\cos\omega\tau}{1+\frac{2q}{\omega}\sin\omega\tau}\int_0^{2\pi}\sin^2\psi\,d\psi. \qquad (32)$$

Воспользовавшись формулами синуса и косинуса разности двух углов, (32) и (25) можно представить в следующем виде:

$$\dot{A}(t) = \frac{\mu A^3\omega_0 S_2}{2\pi S_0}[(3\sin^2\omega\tau-1)\cos\omega\tau J_1 + (1-3\cos^2\omega\tau)\sin\omega\tau J_2 - \\ -\sin^2\omega\tau\cos\omega\tau J_3 + \sin\omega\tau\cos^2\omega\tau J_4] - \frac{A}{2\pi}\frac{2\delta-2q\cos\omega\tau}{1+\frac{2q}{\omega}\sin\omega\tau}J_5, \qquad (33)$$

$$\dot{\psi}(t) = \omega + \frac{\mu A^2\omega_0 S_2}{2\pi S_0}[(3\sin^2\omega\tau-1)\cos\omega\tau J_4 + (1-3\cos^2\omega\tau)\sin\omega\tau J_1 - \\ -\sin^2\omega\tau\cos\omega\tau J_2 + \sin\omega\tau\cos^2\omega\tau J_6] - \frac{A}{2\pi}\frac{2\delta-2q\cos\omega\tau}{1+\frac{2q}{\omega}\sin\omega\tau}J_7, \qquad (34)$$

где

$$J_1 = \int_0^{2\pi}\sin^2\psi\cos^2\psi\,d\psi; \quad J_2 = \int_0^{2\pi}\sin^3\psi\cos\psi\,d\psi; \quad J_3 = \int_0^{2\pi}\sin^4\psi\,d\psi;$$

$$J_4 = \int_0^{2\pi}\sin\psi\cos^3\psi\,d\psi; \quad J_5 = \int_0^{2\pi}\sin^2\psi\,d\psi; \quad J_6 = \int_0^{2\pi}\cos^4\psi\,d\psi;$$

$$J_7 = \int_0^{2\pi}\sin\psi\cos\psi\,d\psi.$$

После определения величин $J_1 = \pi/4$, $J_2 = J_4 = J_7 = 0$, $J_3 = J_6 = \frac{3}{4}\pi$, $J_5 = \pi$ из (33) и (34) соответственно получим

$$\dot{A}(t) = -\frac{\mu\omega_0 A^3 S_2}{8S_0}\cos\omega\tau - \frac{A}{2}\frac{2\delta-2q\cos\omega\tau}{1+\frac{2q}{\omega}\sin\omega\tau}, \qquad (35)$$

$$\dot{\psi}(t) = \omega + \frac{\mu A^2\omega_0 S_2}{8S_0}\sin\omega\tau. \qquad (36)$$

Амплитуда установившихся колебаний согласно (35) при $\dot{A}(t) = 0$ с учетом (31) равна

$$A_y = 2\left[\frac{S_0 M\cos\omega\tau - \left(\frac{L}{\rho}+rC\right)}{S_2 M\cos\omega\tau\left(1+\frac{\omega_0^2 S_0 M}{\omega}\sin\omega\tau\right)}\right]^{1/2}. \qquad (37)$$

Частота стационарных колебаний определяется из (36):

$$\omega_y = \omega + \frac{\mu A_y^2\omega_0 S_2}{8S_0}\sin\omega\tau = \omega + \frac{\omega_0^2\sin\omega\tau\left[S_0 M\cos\omega\tau - \left(\frac{L}{\rho}+rC\right)\right]}{2\cos\omega\tau\left(1+\frac{\omega_0^2 S_0 M}{\omega}\sin\omega\tau\right)}. \qquad (38)$$

Нелинейная поправка к частоте, как видно из (38), пропорциональна малому параметру μ. Она будет тем больше, чем сильнее неравенство

$$S_0 M \cos \omega\tau > \frac{L}{\rho} + rC, \tag{39}$$

являющееся, согласно (37), условием самовозбуждения генератора.

Приближенно, с точностью до величины порядка μ, можно считать, что $\omega_y = \omega$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Описанный метод исследования нелинейных систем с запаздыванием позволяет обнаружить многочастотность колебаний в генераторах с запаздывающей обратной связью, определить частоты возможных колебаний, найти амплитуду и частоту стационарных колебаний и, наконец, получить условия самовозбуждения генератора.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. С. Гоноровский, К теории высокочастотных автогенераторов с запаздывающей обратной связью, Радиотехника, 1958, **13**, 5, 25.
2. И. С. Гоноровский, К вопросу об установлении автоколебаний в высокочастотном генераторе с запаздывающей обратной связью, Радиотехника, 1959, **14**, 1, 15.
3. А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, ГИФМЛ, 1959.
4. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, ГИФМЛ, 1958.
5. И. М. Капчинский, Методы теории колебаний в радиотехнике, ГЭИ, 1954.
6. C. C. Cutler, The regenerative pulse generator, Proc. I. R. E., 1955, **43**, 2, 140.
7. В. С. Кисляков, Применение метода построения асимптотических приближений Крылова и Боголюбова для исследования систем с запаздыванием, Автоматика и телемеханика, 1960, **21**, 4, 442.
8. В. С. Кисляков, Обоснование применения метода гармонической линеаризации для исследования периодических колебаний системы с запаздыванием, Автоматика и телемеханика, 1960, **21**, 11, 1480.
9. Н. Н. Красовский, О периодических решениях дифференциальных уравнений с запаздыванием времени, Докл. АН СССР, 1957, **114**, 2, 252.
10. N. Minorsky, Self-exited oscillations in dynamical systems possessing retarded actions, Trans. ASME, 1942, **64**, 1,65.
11. V. Met, On multimode oscillators with constant time delay, Proc. I. R. E., 1957, **45**, 8, 1119.

Поступила в редакцию
11 I 1961

1961 № 12

О НАИМЕНЬШЕМ ЧИСЛЕ УПРАВЛЯЕМЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В АНТЕННЕ С ЭЛЕКТРИЧЕСКИМ КАЧАНИЕМ ЛУЧА

М. И. Конторович, В. Ю. Петрунькин

Рассмотрен вопрос о числе независимых элементов антенны, обеспечивающих качание луча в нужном пространственном угле. Приведено соотношение, связывающее число элементов с коэффициентом направленного действия антенны. В качестве частного случая рассмотрено линейное качание луча.

ВВЕДЕНИЕ

Как известно, электрическое перемещение диаграммы антенны в пространстве может быть осуществлено при помощи системы, состоящей из ряда излучателей, питаемых токами (напряжениями) при соответственно подобранных амплитудах и фазах. Частным случаем такой системы является линейная решетка излучателей, в которой ориентировка диаграммы в пространстве достигается подбором фазы токов в отдельных элементах при неизменных амплитудах.

Применительно к этому случаю Вендик [1] показал, что при заданном угле качания луча Θ_0 и ширине диаграммы решетки $\Delta\Theta$ наименьшее число элементов решетки n, независимо управляемых по фазе, определяется условием

$$n \geqslant \frac{\Theta_0}{\Delta\Theta} + 1.$$

В другой своей работе [2] Вендик распространяет это соотношение на более широкий класс антенн.

Настоящая статья также посвящена вопросу о наименьшем числе элементов в системе, осуществляющей перемещение диаграммы излучения в заданном пространственном угле; однако мы попытаемся связать число n не с шириной диаграммы, а с коэффициентом направленного действия (кнд) антенны, который, как нам кажется, в большинстве случаев (хотя и не всегда) более полно характеризует антенну.

Как видно из приведенного ниже вывода, полученные в настоящей работе соотношения относятся к антенным системам произвольного вида при условии, что ни сама антенна, ни окружающая ее среда не содержат нелинейных (или зависящих от времени) элементов; если же эти элементы присутствуют, они могут рассматриваться лишь как управляющие элементы, не влияющие на характер парциальных диаграмм.

1. О НАИМЕНЬШЕМ ЗНАЧЕНИИ ОДНОЙ КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМЫ

Рассмотрим в сферической системе координат r, φ, Θ систему функций $P_i(\varphi, \Theta)$ $(i = 1, 4, \ldots, n)$, вообще говоря, комплексных и зависящих только от φ и Θ.

Предположим, что P_i на поверхности сферы единичного радиуса ортогональны и нормированы в том смысле, что соблюдаются условия

$$\int_S P_i(\varphi, \Theta)\, P_k^*(\varphi, \Theta)\, ds = 0, \quad \int_S |P_i(\varphi, \Theta)|^2\, ds = 1, \tag{1}$$

где интегрирование ведется по сфере единичного радиуса и P_k^* — комплексно-сопряженная с P_k величина.

Составим теперь функцию

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} C_i P_i(\varphi, \Theta), \tag{2}$$

представляющую собой линейную комбинацию из функций P_i с независящими от φ и Θ коэффициентами C_i. Кроме того, потребуем, чтобы для некоторого фиксированного направления φ_0, Θ_0 выполнялось условие

$$\Phi(\varphi_0, \Theta_0) = \sum_{i=1}^{n} C_i P_i(\varphi_0, \Theta_0) = \alpha, \tag{3}$$

где α — некоторое вещественное число.

Теперь составим величину

$$Q = \int_S |\Phi^2| \, ds,$$

где интеграл берется по всей поверхности сферы единичного радиуса.

В соответствии с (1) получаем

$$Q = \sum_{i=1}^{n} C_i C_i^* \sum_{i=1}^{n} |C_i|^2, \tag{4}$$

где C_i^* — комплексно-сопряженная с C_i величина.

Выбор коэффициентов C_i до сих пор ничем не ограничивался, кроме условия (3), и, следовательно, из n коэффициентов по произволу можно было задать $n-1$ коэффициент; например, выбрать произвольно C_i для всех i, кроме $i=1$.

Из всех возможных систем коэффициентов выделим теперь одну систему, определяемую соотношениями

$$C_{i0} = \alpha \frac{P_i^*}{\sum_{i=1}^{n} |P_i|^2}, \tag{5}$$

причем здесь все величины берутся при значениях $\varphi = \varphi_0$ и $\Theta = \Theta_0$.

Простой подстановкой легко убедиться, что C_{i0} удовлетворяют соотношению (3); кроме того, непосредственно видно, что имеют место равенства

$$C_{i0} P_1^* = C_{10} P_i^*. \tag{6}$$

Если теперь обратиться к формуле (4) и вычислить для этого случая $Q = Q_0$, то получим

$$Q_0 = |\alpha|^2 \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} |P_i|^2}. \tag{7}$$

Покажем теперь, что полученное значение $Q = Q_0$, соответствующее значениям коэффициентов $C_i = C_{i0}$, будет наименьшим из всех возможных при условии, конечно, что любая система коэффициентов удовлетворяет соотношению (3).

Для этой цели составим разность

$$Q - Q_0 = \sum_{i=1}^{n} [|C_i|^2 - |C_{i0}|^2]$$

и произведем следующие преобразования:

$$|C_i|^2 = C_i C_i^* = (C_i - C_{i0} + C_{i0})(C_i^* - C_{i0}^* + C_{i0}^*) =$$
$$= (C_i - C_{i0})(C_i^* - C_{i0}^*) + C_{i0}(C_i^* - C_{i0}^*) + C_{i0}^*(C_i - C_{i0}) + C_{i0}C_{i0}^*$$

и, следовательно,

$$|C_i|^2 - |C_{i0}|^2 = |C_i - C_{i0}|^2 + C_{i0}(C_i^* - C_{i0}^*) + C_{i0}^*(C_i - C_{i0}).$$

Таким образом

$$Q - Q_0 = \sum_{i=1}^{n} |C_i - C_{i0}|^2 + \sum_{i=0}^{n} [C_{i0}(C_i^* - C_{i0}^*) + C_{i0}^*(C_i - C_{i0})]. \quad (8)$$

Из равенства (3) легко получается соотношение

$$\sum_{i=1}^{n} P_i (C_i - C_{i0}) = 0, \quad (9)$$

а также комплексно-сопряженное с ним равенство

$$\sum_{i=1}^{n} P_i^* (C_i^* - C_{i0}^*) = 0. \quad (10)$$

Умножая теперь (9) и (10) соответственно на C_{10}^*/P_1 и C_{10}/P_1^* и вычитая из (8), получаем

$$Q - Q_0 = \sum_{i=1}^{n} |C_i - C_{i0}|^2 + \sum_{i=1}^{n} \left[(C_i - C_{i0}) \left(C_{i0}^* - \frac{P_i}{P_1} C_{10}^* \right) + \right.$$
$$\left. + (C_i^* - C_{i0}^*) \left(C_{i0} - \frac{P_i^*}{P_1^*} C_{10} \right) \right].$$

Однако на основании равенства (6) последняя сумма обращается в нуль и, следовательно,

$$Q - Q_0 = \sum_{i=1}^{n} |C_i - C_{i0}|^2 \geqslant 0, \quad (11)$$

откуда непосредственно и вытекает высказанное выше утверждение, что Q_0 будет наименьшим значением из всех возможных Q.

2. О КОЛИЧЕСТВЕ УПРАВЛЯЕМЫХ ЭЛЕМЕНТОВ, ОБЕСПЕЧИВАЮЩЕМ КАЧАНИЕ ЛУЧА С НУЖНЫМ УСИЛЕНИЕМ

Полученный выше результат позволяет установить связь между количеством управляемых элементов в излучающей системе с углом качания луча и кнд антенны.

Предположим, что на поверхности сферы единичного радиуса * создается электрическое поле, касательная составляющая которого равна $E(\varphi, \Theta)$. Будем теперь считать, что в рассматриваемой точке $\varphi_0 \Theta_0$ (направление главного максимума диаграммы антенны) поле равно E_0

$$E(\varphi_0, \Theta_0) = E_0.$$

Предполагая, что поле линейно поляризовано, можно мощность излуче-

* Радиус выбран достаточно большим для того, чтобы можно было рассматривать поле антенны в дальней зоне.

ния написать в виде

$$W = \frac{c}{4\pi} \int_S |E|^2 ds. \tag{12}$$

Когда кнд антенны в направлении φ_0, Θ_0 выражается следующим образом:

$$D = \frac{cE_0^2}{W}. \tag{13}$$

Рассмотрим теперь излучающую систему, состоящую из излучателей, каждый из которых создает поле E_i, так что $E = \sum_{i=1}^{n} E_i$.

Так как поле, создаваемое отдельным излучателем, пропорционально интенсивности возбуждения (току, напряжению или другому фактору, вызывающему пропорциональное изменение поля), можно положить

$$E_i = C_i P_i,$$

где P_i — функции, зависящие от φ и Θ (парциальные диаграммы) и подчиняющиеся условиям (1) *, C_i — коэффициенты, не зависящие от φ и Θ, определяемые условиями возбуждения антенны, причем такие, что $\alpha = E_0$ (условие (3)).

Таким образом, можем написать

$$E = \sum_{i=1}^{n} C_i P_i. \tag{14}$$

Теперь, исходя из (12), можем написать

$$W = \frac{c}{4\pi} \sum_{i=1}^{n} |C_i|^2$$

и в соответствии с (7) получить оценку

$$W \geqslant \frac{c}{4\pi} \frac{E_0^2}{\sum_{i=1}^{n} |P_i|^2}.$$

Следовательно,

$$D \leqslant 4\pi \sum_{i=1}^{n} |P_i|^2. \tag{15}$$

Рассматривая теперь D как функцию координат φ_0, Θ_0 (функцию положения главного луча антенны в пространстве), проинтегрируем неравенство (15) по поверхности сферы.

Учитывая нормировку (1) фукнций P_i, получаем

$$\int_S D ds \leqslant 4\pi \sum_{i=1}^{n} \int_S |P_i|^2 ds = 4\pi n$$

или

$$n \geqslant \frac{1}{4\pi} \int_S D ds. \tag{16}$$

Таким образом, при заданной величине D как функции φ_0 и Θ_0 (т. е. в процессе качания луча) необходимое число парциальных излучателей, образующих антенну и управляемых независимо друг от друга, должно

* Таким образом, парциальные диаграммы предполагаются ортогональными. Далее показано, что это не является необходимым условием.

быть не меньше, чем правая часть (16). Когда коэффициенты C_i в (14) вы браны равными C_{i0}, как это следует из предыдущего, неравенство (16 переходит в равенство

$$n = \frac{1}{4\pi} \int_S D ds. \tag{17}$$

Таким образом, учитывая, что по крайней мере в одном случае можно достигнуть нижнего предела в неравенстве (16), мы должны считать, что наименьшее значение числа n определяется равенством (17).

Переходя теперь к рассмотрению случая, когда качание луча проис ходит в некоторой области S_Ω, которой соответствует телесный угол Ω попытаемся определить для этого случая минимальное число управляе мых элементов антенны. Оставляя в стороне вопрос о физической реали зуемости соответствующих полей, прежде всего положим D равным нулю всюду, за исключением области S_Ω; это, очевидно, необходимо сделать для того, чтобы величина интеграла (17) стала наименьшей. Таким образом можем написать

$$n = \frac{1}{4\pi} \int_{S_\Omega} D ds. \tag{18}$$

Если в области S_Ω D не постоянно и приобретает наибольшее значени $D_{\text{макс}}$ и наименьшее $D_{\text{мин}}$, то из (18) следуют неравенства

$$n > \frac{\Omega}{4\pi} D_{\text{мин}}, \qquad n < \frac{\Omega}{4\pi} D_{\text{макс}}. \tag{19}$$

Если D постоянно в области S_Ω, то вместо (19) получаем

$$n = \frac{\Omega}{4\pi} D. \tag{20}$$

Таким образом, если в процессе качания луча усиление меняется в пред лах

$$D_{\text{мин}} < D < D_{\text{макс}},$$

то наименьшее значение n лежит в границах, определяемых (19 если D постоянно, то наименьшее n, обеспечивающее выбранное зна чение D, определяется (20).

3. ОБОБЩЕНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ НА СЛУЧАЙ НЕОРТОГОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

В предыдущем предполагалось, что функции P_i образуют ортогональ ную систему в смысле соотношений (1). Однако полученные результат остаются в силе, если условие ортогональности не имеет места. Это можн видеть из следующих соображений. Если функции P_i не ортогональны, т можно применить известный процесс ортогонализации и составить нову систему ортогональных функций q_i [3], каждая из которых будет пред ставлять собой линейную комбинацию из P_i, т. е.

$$q_i = \sum_{s=1}^{n} \mu_{is} P_s, \tag{21}$$

где $\mu_{i,s}$ — постоянные коэффициенты, вообще говоря комплексные.

Решая уравнения (21) относительно P_s, получим

$$P_i = \sum_{s=1}^{n} \nu_{is} q_s,$$

где $\nu_{i,s}$ — коэффициенты, выражающиеся через μ_{is}. Таким образом, соо ношение (14) можно написать в форме

$$E = \sum_{i=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} C_i \nu_{is} q_s = \sum_{i=1}^{n} d_i q_i, \tag{22}$$

где

$$d_s = \sum_{s=1}^{n} C_s v_{si}.$$

Повторяя все предыдущие выкладки применительно к соотношению (22), представляющему собой линейную комбинацию из функций q_i, подчиняющихся условиям ортогональности, придем непосредственно к полученным ранее выводам.

4. СЛУЧАЙ ЛИНЕЙНОГО КАЧАНИЯ ЛУЧА

Полученные выше общие соотношения (16) и (20) позволяют также рассмотреть специальный случай, когда поле зависит только от одной координаты, например φ. В этом случае, очевидно, перемещение может происходить только вдоль одной линии, и в этом смысле можно здесь говорить о линейном качании луча. Именно случай линейного качания до настоящего времени рассматривался в литературе [1, 2].

В соответствии с этим предположим, что перемещение луча происходит в азимутальном направлении и что его положение определяется углом φ_0.

Характеристика направленного действия излучающей системы представляет собой для каждого φ_0 функцию от φ и не зависит от полярного угла Θ. В соответствии с этим электрическое поле (на рассматриваемой сфере) можно представить как

$$E = E_0 A(\varphi, \varphi_0),$$

где $A(\varphi, \varphi_0)$ — функция от φ, обращающаяся в единицу при $\varphi = \varphi_0$.

Выражение (12) приобретает теперь вид

$$W = \frac{c}{4\pi} E_0^2 \int_0^{2\pi} |A|^2 d\varphi \int_0^{\pi} \sin\Theta\, d\Theta = \frac{cE_0^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} |A|^2 d\varphi,$$

, следовательно,

$$D = \frac{cE_0^2}{W} = \frac{2\pi}{\int_0^{2\pi} |A|^2 d\varphi}.$$

Подставляя в (17) это выражение для D, получаем

$$n = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi_0}{\int_0^{2\pi} |A|(\varphi, \varphi_0)|^2 d\varphi} \int_0^{\pi} \sin\Theta_0\, d\Theta_0 = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi_0}{\int_0^{2\pi} |A|(\varphi, \varphi_0)|^2 d\varphi}. \qquad (23)$$

Если ввести

$$D_\varphi = \frac{2\pi}{\int_0^{2\pi} |A(\varphi, \varphi_0)|^2 d\varphi},$$

то (23) приобретает вид

$$n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D_\varphi(\varphi_0)\, d\varphi_0. \qquad (24)$$

Эта формула аналогична формуле (17). Стоящая здесь величина D_φ представляет собой отношение квадрата напряженности поля в направлении φ_0 к среднему значению квадрата напряженности поля на дуге большого круга сферы и является в данном случае аналогом коэффициента направленного действия D.

Если принять, подобно тому как это сделано в § 2, что поле за пределами угла качания ($\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$) равно нулю и что D_φ в этих пределах остается постоянным, получаем соотношение

$$n = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2\pi} D_\varphi, \tag{25}$$

являющееся аналогом (20).

Интересно отметить, что в случае, когда характеристика направленного действия излучателя имеет вид

$$|A(\varphi, \varphi_0)| = \frac{\sin a(\varphi - \varphi_0)}{a(\varphi - \varphi_0)},$$

для D_φ получается выражение

$$D_\varphi \simeq \frac{5{,}6}{\Delta\varphi},$$

где $\Delta\varphi$ — ширина диаграммы по точкам половинной мощности, и (25) дает

$$n \simeq \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\Delta\Theta}.$$

Таким образом, для этого специального случая получено выражение, примерно совпадающее с формулой, полученной Вендиком.

В заключение полезно указать, что формулы (24) и (25) имеют силу и для несколько более общего случая, чем рассмотренный в настоящем параграфе, а именно, когда диаграмму направленности можно представить в форме произведения двух функций: одной, зависящей лишь от φ, и другой, зависящей от Θ, т. е. когда

$$E = E_0 A(\varphi, \varphi_0) \frac{B(\Theta)}{B(\Theta_0)}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. О. Г. Вендик, Синтез линейки излучателей с немеханическим качанием луча, Изв. вузов МВО СССР (Радиотехника), 1960, 3, 1, 77.
2. О. Г. Вендик, О распределении тока в антенне с немеханическим качанием луча, Изв. вузов МВО СССР (Радиотехника), 1961, 4, 1, 64.
3. Ф. М. Морс, Г. Фешбах, Методы теоретической физики, перев. с англ. I, ИЛ, 1958.

Поступила в редакцию
25 IV 1961

1961 № 12

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ КРЕСТООБРАЗНОМ ВОЛНОВОДЕ

Н. А. Кузьмин, Т. В. Макаров

Вариационным методом найдены собственные функции и собственные значения волн регулярного идеально проводящего крестообразного волновода. Приведены численные результаты.

1. ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

Нахождение полей и определение критических частот электромагнитных волн (E- и H-типов) в регулярном идеально проводящем волноводе сводится к решению скалярных уравнений

$$\Delta \begin{Bmatrix} \tilde{\psi} \\ \psi \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \tilde{\varkappa} \\ \varkappa \end{Bmatrix}^2 \begin{Bmatrix} \tilde{\psi} \\ \psi \end{Bmatrix} = 0 \tag{1}$$

при соответствующих краевых условиях:

а) для магнитных волн $\left.\dfrac{\partial \tilde{\psi}}{\partial n}\right|_{(L)} = 0,$ (2)

б) для электрических волн $\psi|_{(L)} = 0$ (3)

на контуре (L) поперечного сечения $(S_\perp)$ волновода. Все геометрические параметры крестообразного волновода приведены на рис. 1. Оператор Δ — двумерный оператор Лапласа; $\tilde{\varkappa}, \varkappa$ — собственные значения соответственно магнитных и электрических волн; $\vec{n}$ — внешняя нормаль к контуру; функции $\tilde{\psi}$ и ψ — продольные составляющие магнитного и электрического векторов Герца, связанные с продольными составляющими полей известными соотношениями

$$H_z = \tilde{\varkappa}^2 \tilde{\psi}, \quad E_z = \varkappa^2 \psi,$$

причем

$$\begin{Bmatrix} \tilde{\varkappa} \\ \varkappa \end{Bmatrix}^2 = k^2 - \begin{pmatrix} \tilde{h} \\ h \end{pmatrix}^2,$$

$\tilde{h}, h$ — постоянные распространения магнитных и электрических волн соответственно.

Как известно, экстремальные функционалы, уравнениями Эйлера которых являются (1), имеют вид

$$\begin{Bmatrix} \tilde{\varkappa} \\ \varkappa \end{Bmatrix}^2 = \iint\limits_{S_\perp} \left(\nabla \begin{Bmatrix} \tilde{\psi} \\ \psi \end{Bmatrix} \right)^2 dS_\perp \tag{4}$$

при условии, что

$$\iint\limits_{S_\perp} \begin{Bmatrix} \tilde{\psi} \\ \psi \end{Bmatrix}^2 dS_\perp = 1, \tag{5}$$

где ∇ — двумерный оператор Гамильтона.

Для сокращения записи введем обозначение u_n, под которым будем понимать приближенные выражения для $\tilde{\psi}$ или ψ при соответствующем условии (2) или (3).

Для нахождения собственных значений и собственных функций удобно воспользоваться методом Ритца, согласно которому приближенные решения строятся в виде ряда

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i, \tag{6}$$

где a_i — пока неизвестные коэффициенты. Функции φ_i в соответствии с методом Ритца должны удовлетворять краевому условию (3); при условии (2) требования к φ_i могут быть ослаблены. Последовательность функций $\{\varphi_i\}$ должна быть полной, линейно независимой системой. Коэффициенты a_i выбираются из условия минимума (4) при условии (5). Таким образом, задача сводится к нахождению минимума функций n переменных

$$(\nabla u_n, \nabla u_n) = \sum_{i,j=1}^{n} (\nabla\varphi_i, \nabla\varphi_j)\, a_i a_j,$$

где круглые скобки означают скалярное произведение функций. По методу неопределенных множителей Лагранжа составим функционал

$$F = (\nabla u_n, \nabla u_n) - \left\{\frac{\tilde{\varkappa}}{\varkappa}\right\}^2 (u_n, u_n)$$

и из условия $\partial F/\partial a_j = 0$ получим симметричную систему

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \left[(\nabla\varphi_i, \nabla\varphi_j) - \left\{\frac{\tilde{\varkappa}}{\varkappa}\right\}^2 (\varphi_i, \varphi_j)\right] = 0; \quad j = 1, 2, 3, \ldots, n. \tag{7}$$

Система (7) — линейная, однородная относительно a_i. Из условия равенства ее детерминанта нулю получаем характеристическое уравнение для $\left\{\frac{\tilde{\varkappa}}{\varkappa}\right\}^2$:

$$\begin{vmatrix} (\nabla\varphi_1, \nabla\varphi_1) - \left\{\frac{\tilde{\varkappa}}{\varkappa}\right\}^2 (\varphi_1, \varphi_1); & (\nabla\varphi_2, \nabla\varphi_1) - \left\{\frac{\tilde{\varkappa}}{\varkappa}\right\}^2 (\varphi_2, \varphi_1); \ldots & (\nabla\varphi_n, \nabla\varphi_1) - \left\{\frac{\tilde{\varkappa}}{\varkappa}\right\}^2 (\varphi_n, \varphi_1); \\ (\nabla\varphi_1, \nabla\varphi_2) - \left\{\frac{\tilde{\varkappa}}{\varkappa}\right\}^2 (\varphi_1, \varphi_2); & (\nabla\varphi_2, \nabla\varphi_2) - \left\{\frac{\tilde{\varkappa}}{\varkappa}\right\}^2 (\varphi_2, \varphi_2), \ldots & (\nabla\varphi_n, \nabla\varphi_2) - \left\{\frac{\tilde{\varkappa}}{\varkappa}\right\}^2 (\varphi_n, \varphi_2); \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (\nabla\varphi_1, \nabla\varphi_n) - \left\{\frac{\tilde{\varkappa}}{\varkappa}\right\}^2 (\varphi_1, \varphi_n); & (\nabla\varphi_2, \nabla\varphi_n) - \left\{\frac{\tilde{\varkappa}}{\varkappa}\right\}^2 (\varphi_2, \varphi_n), \ldots & (\nabla\varphi_n, \nabla\varphi_n) - \left\{\frac{\tilde{\varkappa}}{\varkappa}\right\}^2 (\varphi_n, \varphi_n); \end{vmatrix} = 0 \tag{8}$$

Наименьший из корней уравнения (8) равен минимуму выражения (4) при условии (5).

Для нахождения приближенного m-го собственного значения [2] необходимо искать минимум выражения (4) при дополнительных условиях

$$(u_m, u_m) = 1, \quad (u_m, u_k) = 0; \quad k = 1, 2, 3, \ldots, (m-1) \tag{9}$$

где u_k — приближенное значение k-й нормированной собственной функции оператора Лапласа.

2. МАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

Первому собственному значению уравнения (1) при условии (2) будет соответствовать основная магнитная волна (рис. 1, *а*).

В качестве функций φ_i основной магнитной волны выберем последовательность функций

$$\varphi_{nm} = \sin\frac{n\pi x}{2a} - \sin\frac{m\pi y}{2a}; \quad n, m = 0, 1, 3, 5, \ldots.$$

Вычисления проведем, ограничившись функциями

$$\varphi_1 = \sin\frac{\pi x}{2a};\quad \varphi_2 = -\sin\frac{\pi y}{2a};\quad \varphi_3 = \sin\frac{3\pi x}{2a};\quad \varphi_4 = -\sin\frac{3\pi y}{2a}.$$

Тогда приближенное выражение для первой собственной функции запишется в виде

$$\tilde{\psi}_1 = a_1\sin\frac{\pi x}{2a} - a_2\sin\frac{\pi y}{2a} + a_3\sin\frac{3\pi x}{2a} - a_4\sin\frac{3\pi y}{2a}.$$

Из равенства нулю детерминанта первого порядка в (8) получим первое приближение к собственному значению

$$\tilde{\varkappa}_1^{(1)} = \frac{\pi}{2a}\sqrt{\frac{1-(1-\sigma)^2+\frac{1}{\pi}(1-\sigma)\sin\pi\sigma}{1-(1-\sigma)^2-\frac{1}{\pi}(1-\sigma)\sin\pi\sigma}}, \qquad (10)$$

где $\sigma = b/2a$; индекс (1) сверху означает степень приближения. Чем выше порядок детерминанта, тем больше точность собственных значений и тем

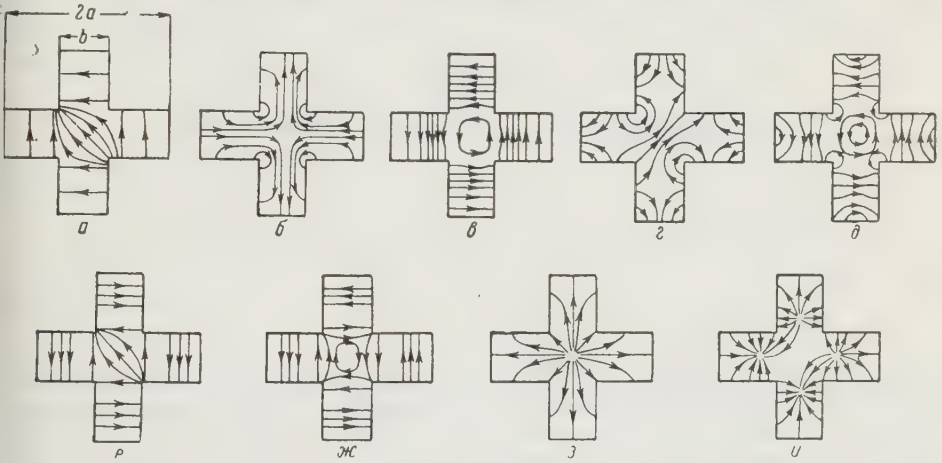


Рис. 1

ниже они приближаются к истинным. Расчеты были доведены до четвертого приближения. Первое собственное значение и коэффициенты нормированной в соответствии с (5) первой собственной функции в зависимости от σ при $2a = \text{const}$, полученные из равенства нулю детерминанта четвертого порядка, приведены в табл. 1. В этой же таблице для сравнения приведено собственное значение, рассчитанное по формуле (10).

Таблица 1

σ	1,0	0,75	0,50	0,25	0,10	0,05
$\tilde{\varkappa}_1^{(1)}\cdot 2a$	3,14	3,34	3,90	4,70	5,20	5,40
$\tilde{\varkappa}_1^{(4)}\cdot 2a$	3,14	3,33	3,88	4,06	3,44	3,60
$\tilde{\varkappa}_1^{(4)}\cdot 2a\,\sigma$	3,14	2,50	1,94	1,02	0,34	0,18
$a_1=a_2$	$\frac{0,5}{a}$	$\frac{0,53}{a}$	$\frac{0,66}{a}$	$\frac{0,97}{a}$	$\frac{1,56}{a}$	$\frac{2,17}{a}$
$a_3=a_4$	0	$\frac{0,0073}{a}$	$\frac{0,03}{a}$	$\frac{0,196}{a}$	$\frac{0,35}{a}$	$\frac{0,50}{a}$

При $\sigma \to 1$ основная волна крестообразного волновода переходит в сумму двух основных вырожденных волн H_{10} и H_{01} квадратного волновода с собственными значениями, равными $\pi/2a$. При $\sigma < 1$ поле основной волны концентрируется на внутренних углах креста, и поэтому целесообразнее нормировать собственное значение этой волны на $2a\sigma$ (3-я строка табл. 1). Обозначим волны в крестообразном волноводе теми же индексами, что и волны прямоугольного волновода, так как при $\sigma \to 1$ соответствующая волна переходит в волну прямоугольного волновода. Поэтому удобно именовать волны крестообразного волновода квази-волнами

Рис. 2

прямоугольного волновода. На рис. 2 приведена кривая зависимости от σ собственного значения волны квази-$(H_{10} + H_{01})$ крестообразного волновода. Распределение электрического поля этой волны в поперечном сечении представлено на рис. 1, *а*.

Второму собственному значению уравнения (1) при условиях (2) и (9) в крестообразном волноводе соответствует волна квази-H_{11} (рис 1,*б*). Для этой волны функции φ_i имеют вид

$$\varphi_{nm} = \sin\frac{n\pi x}{2a}\cos\frac{n\pi y}{2a} + \cos\frac{m\pi x}{2a}\sin\frac{m\pi y}{2a}, \quad n, m = 0, 1, 3, 5, \ldots.$$

Ограничившись функциями

$$\varphi_1 = \sin\frac{\pi x}{2a}\cos\frac{\pi y}{2a}; \qquad \varphi_2 = \cos\frac{\pi x}{2a}\sin\frac{\pi y}{2a};$$

$$\varphi_3 = \sin\frac{3\pi x}{2a}\cos\frac{3\pi y}{2a}; \qquad \varphi_4 = \cos\frac{3\pi x}{2a}\sin\frac{3\pi y}{2a},$$

получим при первом приближении

$$\widetilde{\varkappa}_2^{(1)} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2a}\sqrt{\frac{1-(1-\sigma)^2-\frac{1}{\pi^2}\sin^2\pi\sigma}{1-(1-\sigma)^2-\frac{1}{\pi^2}\sin^2\pi\sigma}}. \qquad (11$$

Второе собственное значение и коэффициенты нормированной второй собственной функции в зависимости от σ, полученные из равенства нул

детерминанта 4-го порядка, приведены в табл. 2 (см. также рис. 2, кривая H_{11}). Там же приведено значение $\widetilde{\varkappa}_2^{(1)}$, рассчитанное по формуле (11). При $\sigma \to 1$ волна квази-H_{11} переходит в суперпозицию двух волн H_{11} квадратного волновода, поляризации которых повернуты друг по отношению к другу на 90° и собственные значения которых равны $\pi\sqrt{2}/2a$.

Таблица 2

σ	1,0	0,75	0,50	0,25	0,10	0,05
$\widetilde{\varkappa}_2^{(1)} \cdot 2a$	$\pi\sqrt{2}$	4,20	3,90	3,72	4,20	4,38
$\widetilde{\varkappa}_2^{(4)} \cdot 2a$	$\pi\sqrt{2}$	4,00	3,62	3,68	4,20	4,38
$a_1 = a_2$	$\frac{0{,}707}{a}$	$\frac{0{,}708}{a}$	$\frac{0{,}77}{a}$	$\frac{1{,}00}{a}$	$\frac{1{,}58}{a}$	$\frac{2{,}24}{a}$
$a_3 = a_4$	0	$\frac{0{,}04}{a}$	$\frac{0{,}005}{a}$	$\frac{0{,}06}{a}$	$\frac{0{,}04}{a}$	$\frac{0{,}04}{a}$

Третьему собственному значению уравнения (1) при условиях (2) и 9) в крестообразном волноводе соответствует волна квази-($H_{20} + H_{02}$) рис. 1, *в*). Эту волну, напоминающую волну H_{01} в круглом волноводе, писывают функции φ_i вида

$$\varphi_{nm} = \cos\frac{n2\pi x}{2a} - \frac{\cos m2\pi y}{2a}; \quad n, m = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

Ограничившись функциями

$$\varphi_1 = \cos\frac{2\pi x}{2a}; \quad \varphi_2 = -\cos\frac{2\pi y}{2a}; \quad \varphi_3 = \cos\frac{4\pi x}{2a}; \quad \varphi_4 = -\cos\frac{4\pi y}{2a},$$

олучим при первом приближении

$$\widetilde{\varkappa}_3^{(1)} = \frac{2\pi}{2a}\sqrt{\frac{1-(1-\sigma)^2 - \frac{1}{2\pi}(1-\sigma)\sin 2\pi\sigma}{1-(1-\sigma)^2 + \frac{1}{2\pi}(1-\sigma)\sin 2\pi\sigma}}. \qquad (12)$$

Собственное значение и коэффициенты нормированной собственной ункции в зависимости от σ, полученные из равенства нулю детерминанта -го порядка, приведены в табл. 3 (см. также рис. 2, кривая H_{20}).

Таблица 3

σ	1,0	0,75	0,50	0,25	0,10	0,05
$\widetilde{\varkappa}_2^{(1)} \cdot 2a$	2π	6,54	6,28	4,76	3,90	3,68
$\widetilde{\varkappa}_3^{(4)} \cdot 2a$	2π	6,26	5,27	4,38	3,62	3,42
$a_1 = a_2$	$\frac{0{,}50}{a}$	$\frac{0{,}53}{a}$	$\frac{0{,}57}{a}$	$\frac{0{,}67}{a}$	$\frac{0{,}92}{a}$	$\frac{1{,}18}{a}$
$a_3 = a_4$	0	$-\frac{0{,}014}{a}$	$-\frac{0{,}08}{a}$	$-\frac{0{,}022}{a}$	$+\frac{0{,}056}{a}$	$+\frac{0{,}19}{a}$

В верхней строке табл. 3 приведено значение $\varkappa_3^{(1)} \cdot 2a$, рассчитанное по ормуле (12). Отсюда видно, что максимальное значение паразитной составляющей $a_3 a_1 = a_4/a_2$ будет при $\sigma = 0{,}5$ и минимальное — при $\simeq 0{,}25$. При $\sigma = 0{,}5$ внутренние углы креста находятся как раз в пучности электрического поля, вызывая тем самым максимальное возмущение

этой волны. При $\sigma \to 1$ волна квази-$(H_{20} + H_{02})$ переходит в суперпозицию двух вырожденных волн H_{20} и H_{02} с собственными значениями, равными $2\pi/2a$.

Волну квази-$(H_{12} + H_{21})$ (рис. 1, *г*) описывает набор функций φ_i:

$$\varphi_1 = \sin\frac{\pi x}{2a}\cos\frac{2\pi y}{2a}; \qquad \varphi_2 = \cos\frac{2\pi x}{2a}\sin\frac{\pi y}{2a};$$

$$\varphi_3 = \sin\frac{3\pi x}{2a}\cos\frac{4\pi y}{2a}; \qquad \varphi_4 = \cos\frac{4\pi x}{2a}\sin\frac{3\pi y}{2a}.$$

Первое приближение к собственному значению волны квази-$(H_{12}+H_{21})$ равно

$$\tilde{\varkappa}_4^{(1)} = \frac{\pi\sqrt{5}}{2a} \times$$

$$\times \sqrt{\frac{1-(1-\sigma)^2 - \frac{3}{5\pi}(1-\sigma)\sin\pi\sigma - \frac{3}{10\pi}(1-\sigma)\sin 2\pi\sigma - \frac{1}{2\pi^2}\sin\pi\sigma\sin 2\pi\sigma}{1-(1-\sigma)^2 + \frac{1}{2\pi}(1-\sigma)\sin\pi\sigma - \frac{1}{\pi}(1-\sigma)\sin 2\pi\sigma + \frac{1}{2\pi^2}\sin\pi\sigma\sin 2\pi\sigma}}. \qquad (13)$$

Собственное значение и коэффициенты нормированной собственной функции в зависимости от σ, полученные из равенства нулю детерминанта 4-го порядка, приведены в табл. 4 (см. также рис. 2, кривая

Таблица 4

σ	1,0	0,75	0,50	0,25	0,10	0,05
$\tilde{\varkappa}_4^{(1)}\cdot 2a$	$\pi\sqrt{5}$	6,55	6,25	6,12	7,00	9,00
$\tilde{\varkappa}_4^{(4)}\cdot 2a$	$\pi\sqrt{5}$	6,30	6,00	6,00	7,00	11,7
$a_1=a_2$	$\frac{1,0}{a}$	$\frac{0,99}{a}$	$\frac{0,78}{a}$	$\frac{1,04}{a}$	$\frac{2,57}{a}$	$\frac{4,00}{a}$
$a_3=a_4$	0	$\frac{0,003}{a}$	$\frac{0,05}{a}$	$\frac{0,04}{a}$	$\frac{0,104}{a}$	$\frac{0,318}{a}$

H_{12}). Там же приведены значения $\tilde{\varkappa}_4^{(1)}$, рассчитанные по формуле (13). При $\sigma \to 1$ получаем суперпозицию двух вырожденных волн H_{21} и H_{12} с собственными значениями, равными $\pi\sqrt{5}/2a$.

Для пятого собственного значения волны квази-H_{22} (рис. 1, *д*) при функциях φ_i вида

$$\varphi_{nm} = \cos\frac{n2\pi x}{2a}\cos\frac{m2\pi y}{2a}; \quad n, m = 1, 2, 3, \ldots$$

первое приближение к $\tilde{\varkappa}_5$ равно

$$\tilde{\varkappa}_5^{(1)} = \frac{2\pi\sqrt{2}}{2a}\sqrt{\frac{1-(1-\sigma)^2 + \frac{1}{4\pi^2}\sin^2 2\pi\sigma}{1-(1-\sigma)^2 + \frac{1}{\pi}(1-\sigma)\sin 2\pi\sigma - \frac{1}{4\pi^2}\sin^2 2\pi\sigma}}. \qquad (14)$$

Собственное значение для этой волны получается с хорошей точностью уже во втором приближении. В табл. 5 приведены собственные значения первого и второго приближений и коэффициенты нормированной собственной функции второго приближения в зависимости от σ (см. также рис. 2, кривая H_{22}). При $\sigma \to 1$ волна квази-H_{22} переходит в суперпозицию двух волн H_{22}, поляризации которых повернуты одна относительно другой на 90° и собственные значения которых равны $2\pi\sqrt{2}/2a$

Для волны квази-$(H_{30}+H_{03})$ (рис. 1, *е*) функции φ_i имеют вид

$$\varphi_{nm}=\sin\frac{n3\pi x}{2a}-\sin\frac{m3\pi y}{2a};\quad n,\ m=0,\ 1,\ 3,\ 5,\ \ldots$$

я

$$\varphi_1=\sin\frac{3\pi x}{2a};\quad \varphi_2=-\sin\frac{3\pi y}{2a};\quad \varphi_3=\sin\frac{9\pi x}{2a};\quad \varphi_4=-\sin\frac{9\pi y}{2a}$$

вое приближение к $\widetilde{\varkappa}_6$ равно

$$\widetilde{\varkappa}_6^{(1)}=\frac{3\pi}{2a}\sqrt{\frac{1-(1-\sigma)^2+\frac{1}{3\pi}(1-\sigma)\sin 3\pi\sigma}{1-(1-\sigma)^2-\frac{1}{3\pi}(1-\sigma)\sin 3\pi\sigma}}. \qquad (15)$$

Собственное значение и коэффициенты нормированной собственной нкции в зависимости от σ приведены в табл. 6.

Таблица 5

σ	1,0	0,75	0,50	0,25	0,10	0,05
$\widetilde{\varkappa}_5^{(1)}\cdot 2a$	$2\pi\sqrt{2}$	9,58	8,90	7,45	6,70	6,44
$\widetilde{\varkappa}_5^{(2)}\cdot 2a$	$2\pi\sqrt{2}$	9,57	8,80	7,44	6,70	6,44
a_1	$\frac{1,0}{a}$	$\frac{1,09}{a}$	$\frac{1,16}{a}$	$\frac{1,23}{a}$	$\frac{1,70}{a}$	$\frac{2,39}{a}$
a_2	0	$-\frac{0,005}{a}$	$+\frac{0,07}{a}$	$+\frac{0,024}{a}$	$-\frac{0,042}{a}$	$-\frac{0,038}{a}$

Таблица 6

σ	1,0	0,75	0,50	0,25	0,10	0,05
$\widetilde{\varkappa}_6^{(1)}\cdot 2a$	3π	9,65	8,70	10,7	14,5	15,7
$\widetilde{\varkappa}_6^{(4)}\cdot 2a$	3π	9,50	8,60	10,2	12,0	11,3
$a_1=a_2$	$\frac{0,50}{a}$	$\frac{0,52}{a}$	$\frac{0,56}{a}$	$\frac{0,81}{a}$	$\frac{1,50}{a}$	$\frac{2,18}{a}$
$a_3=a_4$	0	$-\frac{0,006}{a}$	$+\frac{0,01}{a}$	$+\frac{0,014}{a}$	$-\frac{0,46}{a}$	$-\frac{0,51}{a}$

: $\sigma\to 1$ волна квази-$(H_{30}+H_{03})$ переходит в сумму двух волн H_{30}
$_{03}$ с собственными значениями, равными $3\pi/2a$. Интересно, что при
0, (6) и $\sigma=0$, (3) $\widetilde{\varkappa}_6^{(4)}\cdot 2a=3\pi$ и $a_3=a_4=0$. Это означает, что се-
ия таких размеров почти не возмущают сумму волн H_{30} и H_{03} прямо-
ьного волновода.

Для волны квази-$(H_{40}+H_{04})$ (рис. 1, *ж*), напоминающей по харак-
распределения поля волну H_{02} круглого волновода *, функции φ_i
от вид

$$\varphi_{nm}=\cos\frac{n4\pi x}{2a}-\cos\frac{m4\pi y}{2a};\quad n,\ m=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots.$$

* Отметим, что собственное значение этой волны не является следующим за соб-
ным значением волны квази-$(H_{30}+H_{03})$. Эту волну во многих случаях необхо-
учитывать при рассмотрении вопросов сопряжения регулярных круглых волно-
с изогнутыми волноводами крестообразного сечения при распространении вол-
$_{01}$ в круглом волноводе.

Для

$$\varphi_1 = \cos\frac{4\pi x}{2a}; \quad \varphi_2 = -\cos\frac{4\pi y}{2a}; \quad \varphi_3 = \cos\frac{8\pi x}{2a}; \quad \varphi_4 = -\cos\frac{8\pi y}{2a}$$

первое приближение к собственному значению этой волны равно

$$\widetilde{\varkappa}^{(1)} = \frac{4\pi}{2a}\sqrt{\frac{1-(1-\sigma)^2-\frac{1}{4\pi}(1-\sigma)\sin 4\pi\sigma}{1-(1-\sigma)^2+\frac{1}{4\pi}(1-\sigma)\sin 4\pi\sigma}}. \qquad (16)$$

Собственное значение (рис. 2) и коэффициенты нормированной собственной функции волны квази-($H_{40}+H_{01}$) в зависимости от σ, полученные и

Таблица 7

σ	1,0	0,75	0,50	0,25	0,10	0,05
$\widetilde{\varkappa}^{(1)}\cdot 2a$	4π	12,51	12,50	12,50	8,60	7,70
$\widetilde{\varkappa}^{(4)}\cdot 2a$	4π	12,16	12,00	9,88	7,30	7,06
$a_1 \quad a_2$	$\frac{0,50}{a}$	$\frac{0,52}{a}$	$\frac{0,5}{a}$	$\frac{0,76}{a}$	$\frac{1,01}{a}$	$\frac{1,39}{a}$
$a_3=a_4$	0	$-\frac{0,0364}{a}$	0	$-\frac{0,14}{a}$	$-\frac{0,05}{a}$	$-\frac{0,12}{a}$

равенства нулю детерминанта 4-го порядка, приведены в табл. 7. Там и для сравнения приведено собственное значение, полученное по формуле (16).

При $\sigma \to 1$ волна квази-($H_{40}+H_{04}$) переходит в волну ($H_{40}+H_{04}$) прямоугольного волновода с собственным значением, равным $4\pi/2a$.

3. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ

Определение критической частоты первой электрической волны в волноводе (квази-E_{11}) (рис. 1, *з*) сводится к вычислению наименьшего собственного значения, не равного нулю, уравнения (1) при условии (3).

В качестве функций $\varphi_i(x, y)$ для данной задачи можно выбрать систему функций, составленную из произведений функции $\omega(x, y)$ на различные комбинации тригонометрических функций, где функция $\omega(x, y)$ – непрерывная, имеющая внутри области $S_\perp$ ограниченные и непрерывные $\partial\omega/\partial x$ и $\partial\omega/\partial y$ и удовлетворяющая условиям: $\omega(x, y) > 0$ внутри $S_\perp$, $\omega(x, y) = 0$ на контуре L [3]. В качестве тригонометрических функций можно взять функции

$$\cos\frac{n\pi x}{2a}\cos\frac{m\pi y}{2a}; \qquad n, m = 0, 1, 3, 5, \ldots.$$

Для области «крест» функцию $\omega(x, y)$ определим в виде

$$\omega(x, y) = [|a^2\sigma^2 - x^2| + (a^2\sigma^2 - x^2) + |a^2\sigma^2 - y^2| + (a^2\sigma^2 - y^2)](a^2 - x^2)(a^2 - y^2). \qquad (17)$$

Тогда функции φ_i, удовлетворяющие условию (3) на всем контуре L, будут

$$\varphi_{nm} = \omega(x, y)\cos\frac{n\pi x}{2a}\cos\frac{m\pi y}{2a}; \quad n, m = 0, 1, 3, 5, \ldots.$$

Ограничившись случаем $n = m = 0$, получим первое приближение к собственному значению

$$\varkappa_1^{(1)} = \frac{2}{a} \times$$

$$\times \sqrt{\frac{\frac{8}{45}\sigma^3 + \frac{8}{75}\sigma^5 + \frac{4}{9}\sigma^6 + \frac{24}{4725}\sigma^7 - \frac{4}{15}\sigma^8 + \frac{8}{945}\sigma^9 + \frac{116}{1575}\sigma^{10} - \frac{4}{525}\sigma^{12}}{\frac{64}{225}\sigma^5 + \frac{4}{9}\sigma^6 - \frac{128}{1575}\sigma^7 - \frac{16}{45}\sigma^8 + \frac{79}{4725}\sigma^9 + \frac{2}{15}\sigma^{10} - \frac{16}{525}\sigma^{12} + \frac{4}{1225}\sigma^{14}}} . \quad (18)$$

Численное значение $\varkappa_1^{(1)}$ и коэффициент a_0 нормированной собственной функции волны квази-E_{11} в зависимости от σ приведены в табл. 8 (см. также рис. 2).

Таблица 8

σ	1,0	0,75	0,50	0,25	0,10	0,05
$\varkappa_1^{(1)} \cdot 2a$	4,5	4,84	6,00	12,2	29,6	64,0
$a_0 a^7$	0,25	0,54	1,50	9,70	48,6	570

Определение критической частоты второй электрической волны квази-$(E_{12} + E_{21})$ (рис. 1, *и*) сводится к вычислению второго собственного значения уравнения (1) при краевом условии (3) и дополнительном условии (9).

В качестве функций φ_i выбрана система функций

$$\varphi_{nm} = \omega(x, y)\left(\sin\frac{n2\pi x}{2a} + \sin\frac{m2\pi y}{2a}\right); \quad n, m = 1, 2, 3, \ldots .$$

В табл. 9 приведены значения коэффициента нормированной приближенной собственной функции и собственное значение $\varkappa_2^{(1)}$ волны квази-$(E_{12} + E_{21})$ в зависимости от σ при условии $n = m = 1$.

Из-за громоздкости формула для $\varkappa_2^{(1)}$ не приводится.

Таблица 9

σ	1,0	0,75	0,50	0,25
$\varkappa_2^{(1)} \cdot 2a$	7,9	9,32	11,74	29,2
$a_1 a^7$	0,29	0,57	1,26	9,48

При $\sigma \to 1$ волна квази-$(E_{12} + E_{21})$ переходит в суперпозицию двух вырожденных волн E_{12} и E_{21} с собственным значением, равным $\sim \pi\sqrt{5}/2a$. Эта волна крестообразного волновода может быть представлена так же, как трансформированная сумма волн E_{11} круглого волновода (одна с четной, другая с нечетной азимутальными зависимостями). Следовательно, переход волновода круглого сечения на крестообразное снимает вырождение с волн H_{01} и E_{11} (см. соответственно кривые H_{20} и E_{12} на рис. 2). Это дает возможность эффективно использовать крестообразный волновод в изгибах для передачи волны H_{01}.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Г. Михлин, Прямые методы в математической физике, ГИТТЛ, 1950.
2. Ф. Франк, Р. Мизес, Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, ч. II, Гл. ред. общетехн. лит., 1937.
3. Л. В. Конторович, В. И. Крылов, Приближенные методы высшего анализа, 3-е изд., ГИТТЛ, 1950.

Поступила в редакцию
13 IV 1961

МАГНИТОСТАТИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ МАЛОГО ГИРОТРОПНОГО СФЕРОИДА, НАМАГНИЧЕННОГО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНО ОСИ ВРАЩЕНИЯ

Сюй Янь-шэн

Рассмотрен метод вычисления резонансных условий и конфигурации полей магнитостатических колебаний малого поперечно-намагниченного сфероида. В качестве примера приведены вычисления для простых типов колебаний, соответствующих уокеровским колебаниям (1, —1) и (2, —1). Показано, что полученные результаты можно также использовать для учета влияния эллиптичности сферы на резонансные условия и резонансные поля. Рассмотрен случай поперечно-намагниченного тонкого цилиндра и получен спектр его магнитостатических колебаний.

ВВЕДЕНИЕ

Задача о магнитостатических колебаниях малого гиротропного сферо да, намагниченного вдоль оси вращения, рассмотрена впервые Уокеро [1]. В настоящей работе мы исследуем случай поперечного намагничива ния, предельными случаями которого являются поперечно-намагниченны цилиндр и касательно-намагниченный диск. Принципиально такую зад чу нужно решать при помощи функций Ламе, которые мало изучены. О нако мы пойдем по другому пути и выразим потенциалы и составляющ полей через полученные нами ряды сфероидальных функций.

1. МАГНИТОСТАТИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ МАЛОГО ГИРОТРОПНОГО СФЕРОИДА, НАМАГНИЧЕННОГО В ПОПЕРЕЧНОЙ ПЛОСКОСТИ

Задача будет решаться в сфероидальной системе координат, котора связана с декартовой следующим образом:

$$x = (a^2 - b^2)^{1/2}(1 + \xi^2)^{1/2}(1 - \eta^2)^{1/2}\cos\varphi,$$
$$y = (a^2 - b^2)^{1/2}(1 + \xi^2)^{1/2}(1 - \eta^2)^{1/2}\sin\varphi, \qquad (1$$
$$z = (a^2 - b^2)^{1/2}\xi\eta.$$

Предположим, что постоянное магнитное поле направлено по оси y а ось z совпадает с осью вращения сфероида (см. рис. 1).

Магнитная проницаемость гиротропного сфероида будет иметь ви тензора

$$\|\mu\| = \begin{vmatrix} \mu & 0 & -ik \\ 0 & 1 & 0 \\ ik & 0 & \mu \end{vmatrix}. \qquad (2$$

Учитывая малость размеров образца относительно длины волны можно считать

$$\vec{h} = \operatorname{grad}\psi. \qquad (3$$

Подставляя это выражение в уравнение

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0 \qquad (4$$

и учитывая (2), получим дифференциальное уравнение для потенциала внутри феррита ψ_i:

$$\mu\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi_i+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\psi_i=0.$$

При замене координаты y на $\sqrt{\mu}\,y'$ [1] это уравнение сводится к уравнению Лапласа, решение которого имеет вид [2]

$$\psi_{i_{n,m}}=P_n^m(i\xi')\,P_n^m(\eta')\begin{matrix}\cos m\varphi'\\ \sin m\varphi'\end{matrix}=$$

$$=A_{n,m}\int_{-\pi}^{\pi}P_n\left(\frac{iz+x\cos\lambda+\sqrt{\mu}\,y\sin\lambda}{c}\right)\begin{matrix}\cos m\lambda\\ \sin m\lambda\end{matrix}d\lambda,$$

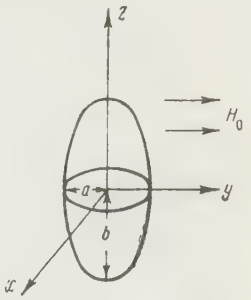


Рис. 1

где $c=(a^2-b^2)^{1/2}$; ξ', η', φ' — измененные сфероидальные координаты после замены $y=\sqrt{\mu}\,y'$.

Полином Лежандра под знаком интеграла можно преобразовать следующим образом:

$$P_n\left(\frac{iz+x\cos\lambda+\sqrt{\mu}\,y\sin\lambda}{c}\right)=P_n\left(\frac{iz+x\cos\lambda+y\sin\lambda}{c}+\frac{\sqrt{\mu}-1}{c}\,y\sin\lambda\right)=$$

$$=P_n\left(\frac{iz+x\cos\lambda+y\sin\lambda}{c}\right)+P_n'\left(\frac{iz+x\cos\lambda+y\sin\lambda}{c}\right)\frac{\sqrt{\mu}-1}{c}\,y\sin\lambda+$$

$$+\frac{1}{2!}P_n''\left(\frac{iz+x\cos\lambda+y\sin\lambda}{c}\right)\left(\frac{\sqrt{\mu}-1}{c}\,y\sin\lambda\right)^2+\ldots,$$

где штрих означает дифференцирование по аргументу. Следует заметить, что ряд при любом заданном n конечен.

Известно также, что [3]

$$\sin^p\lambda=\begin{cases}\sum\limits_{s=0}^{p/2}A_s\cos(p-2s)\lambda & \text{при } p\text{ — четном},\\ \sum\limits_{s=0}^{\frac{p-1}{2}}A_s'\sin(p-2s)\lambda & \text{при } p\text{ — нечетном},\end{cases}$$

$$P_n'=(2n-1)\,P_{n-1}+(2n-5)\,P_{n-3}+(2n-9)\,P_{n-5}+\ldots.$$

Используя приведенные выражения, получим

$$\psi_{i_{n,m}}=A_{n,m}\sum_{p=0}^{n}y^p\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{s}A_{p,s}\,P_{n-p-2s}\left(\frac{iz+x\cos\lambda+y\sin\lambda}{c}\right)\times$$

$$\times\begin{matrix}\cos m\lambda\\ \sin m\lambda\end{matrix}\sin^p\lambda\,d\lambda=\sum_{p,q}f_{p,q}(\xi)\,P_{n-2p}^{n-2q}(\eta)\begin{matrix}\cos(n-2q)\varphi\\ \sin(n-2q)\varphi\end{matrix},\qquad(5)$$

где $A_{p,s}$ — некоторые числовые коэффициенты; $f_{p,q}(\xi)$ — некоторые функции от ξ.

Нормальная составляющая индукции имеет вид

$$B_{\xi i_{n,m}}=\mu(\mathrm{grad}_\xi\psi_{i_{n,m}})-ik\left(\frac{\partial\psi_{i_{n,m}}}{\partial x}\cos\alpha_3-\frac{\partial\psi_{i_{n,m}}}{\partial z}\cos\alpha_1\right)-$$

$$-(\mu-1)\frac{\partial\psi_{i_{n,m}}}{\partial y}\cos\alpha_2,$$

где $\cos\alpha_1$, $\cos\alpha_2$, $\cos\alpha_3$ — направляющие косинусы, равные соответственно

$$\left(\frac{1-\eta^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}\right)^{-1/2}\left[\frac{(1-\eta^2)^{1/2}}{a}\cos\varphi,\ \frac{(1-\eta^2)^{1/2}}{a}\sin\varphi,\ \frac{\eta}{b}\right].$$

Очевидно, что

$$B_{\xi\, i_{n,m}}=\sum_{u,v} g_{u,v}(\xi)\frac{P_{n-2u}^{n-v}(\eta)}{\left(\frac{1-\eta^2}{a}+\frac{\eta^2}{b^2}\right)^{1/2}}\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(n-v)\varphi, \tag{6}$$

где $g_{n,v}(\xi)$ — некоторые функции от ξ.

Из уравнений (5) и (6) видно, что невозможно удовлетворить граничным условиям для одной произвольной наперед заданной комбинации индексов n и m. Для удовлетворения граничным условиям при заданном значении n необходимо привлечь группу типов колебаний с индексами по следующему правилу:

$$\psi_{i_n}=\sum_{p=0}^{N}\sum_{m=0}^{n-2p}\psi_{i_{n-2p,\,m}}=\sum_{p=0}^{N}\sum_{m=0}^{n-2p}F_{p,m}(\xi)\,P_{n-2p}^{m}(\eta)\begin{matrix}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{matrix},$$

$$\psi_{e_n}=\sum_{p=0}^{N}\sum_{m=0}^{n-2p}Q_{n-2p}^{m}(i\xi)\,P_{n-2p}^{m}(\eta)\begin{matrix}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{matrix}, \tag{7}$$

где $N=n/2$ при n — четном; $N=(n-1)/2$ при n — нечетном, $F_{p,m}(\xi)$ — некоторые функции от ξ_e; ψ_e — потенциал вне сфероида. Как видим, для построения потенциалов собственных колебаний сфероида надо взять ряд ψ_n с членами, первый индекс которых принимает все четные (при четном n) или нечетные (при нечетном n) числа, меньшие n, а второй индекс — все числа, меньшие первого индекса.

Получить спектр для всех типов колебаний, удовлетворив граничным условиям, в общем виде очень сложно. Рассмотрим на простых примерах, как удовлетворить граничным условиям и получить резонансные условия.

а) Однородная прецессия, $n=1$.

$$\psi_i=\frac{c_1x-ic_2z}{(a^2-b^2)^{1/2}}=c_1(1+\xi^2)^{1/2}(1-\eta^2)^{1/2}\cos\varphi-ic_2\xi\eta,$$

$$\psi_e=c_3Q_1^1(i\xi)\,P_1^1(\eta)\cos\varphi+c_4Q_1(i\xi)\,P_1\eta,$$

$$B_{\xi i}|_{\xi=\xi_0}=\frac{(c_1\mu+c_2k)\,b}{(a^2-b^2)(\eta^2+\xi_0^2)^{1/2}}(1-\eta^2)^{1/2}\cos\varphi-\frac{i\,(c_2\mu+c_1k)\,a\eta}{(a^2-b^2)(\eta^2+\xi_0^2)^{1/2}},$$

$$B_{\xi e}|_{\xi=\xi_0}=\frac{i\xi_0\dfrac{a}{b}}{(a^2-b^2)(\eta^2+\xi_0^2)^{1/2}}[c_3Q_1^{1'}(i\xi_0)\,P_1^1(\eta)\cos\varphi+c_4Q_1'(i\xi_0)\,P_1(\eta)].$$

Резонансное условие имеет вид

$$k^2=\left(\mu-\frac{a^2}{b^2}\frac{i\xi_0Q_1^{1'}(i\xi_0)}{Q_1^1(i\xi_0)}\right)\left(\mu-\frac{i\xi_0Q_1'(i\xi_0)}{Q_1(i\xi_0)}\right). \tag{8}$$

б) Неоднородная прецессия, $n=2$, зависимость от φ — $\sin 2\varphi$ и $\sin\varphi$

$$\psi_i=\frac{y(c_1'x-ic_2'z)}{a^2-b^2}=\frac{c_1'}{18}P_2^2(i\xi)\,P_2^2(\eta)\sin 2\varphi-\frac{c_2'}{9}P_2^1(i\xi)\,P_2^1(\eta)\sin\varphi,$$

$$\psi_e=c_3'Q_2^2(i\xi)\,P_2^2(\eta)\cos\varphi\sin\varphi+c_4'Q_2^1(i\xi)\,P_2^1(\eta)\sin\varphi.$$

Резонансным условием является

$$k^2 = \left(\mu + 1 - \frac{a^2}{b^2}\frac{i\xi_0 Q_2^{2'}(i\xi_0)}{Q_2^2(i\xi_0)}\right)\left(\frac{b^2}{a^2} + \mu - \frac{i\xi_0 Q_2^{1'}(i\xi_0)}{Q_2^1(i\xi_0)}\right). \qquad (9)$$

После предельного перехода $a \to b$, $\xi_0 \to \infty$ получим $k^2 = (\mu + 4)^2$, что соответствует типам колебаний Уокера (2, —1).

В общем случае поле колебаний эллиптично поляризовано. Эллиптичность поля определяется отношениями c_1/c_2 и c_1'/c_2', значения которых легко вычислить из граничных уравнений.

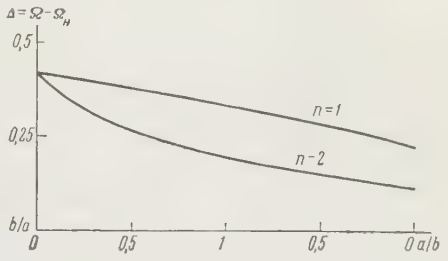


Рис. 2

На рис. 2 приведены зависимости корней уравнений (8), (9) Δ от формы сфероида при $\Omega_H = H_i/4\pi M_0 = 1$, где H_i — напряженность постоянного магнитного поля внутри сфероида; M_0 — намагниченность насыщения феррита.

Отметим, что при помощи полученных выше результатов можно учесть влияние эллиптичности сферы на резонансные условия магнитостатических колебаний. Предположим, что у нас $a^2 = b^2 \pm \delta^2$, где δ^2 — малая величина, т. е. $\delta^2/b^2 \ll 1$ и $|\xi_0^2| = b^2/\delta^2 \gg 1$. Разложим правую часть уравнения (8) в ряд по $1/\xi_0^2$ и ограничимся членами до $(1/\xi_0^2)^2$. Нетрудно вычислить резонансное условие однородной прецессии

$$\Delta \simeq \frac{1}{3} \pm \frac{1}{30}\frac{\delta^2}{b^2},$$

где $\Delta = -1/(\mu - k - 1)$ (то же, что у Уокера [1]).

Очевидно, поправка (второй член правой части этого уравнения) небольшая.

Как следствие эллиптичности сферы возникает эллиптичность резонансных полей однородной прецессии:

$$\frac{c_1}{c_2} \simeq 1 \mp \frac{9}{10k}\frac{\delta^2}{b^2}.$$

Таким же методом можно учесть влияние эллиптичности сферы на резонансные условия других типов магнитостатических колебаний.

2. СПЕКТР КОЛЕБАНИЙ ПОПЕРЕЧНО-НАМАГНИЧЕННОГО ЦИЛИНДРА

Принципиально вышеизложенным методом можно определить резонансные условия всех высших типов колебаний сфероида. Хотя можно показать, что для получения спектра колебаний достаточно взять те члены в выражениях (6), (7), индексы которых $p = u = 0$, вычисления для высших типов колебаний остаются очень сложными. На практике интересно рассмотреть более простой случай — поперечно-намагниченный цилиндр.

Случай продольно-намагниченного цилиндра рассмотрен в работе [4]. Полученный в ней результат отличается тем, что при его выводе учитывались конечный размер образца (т. е. радиус цилиндра) и влияние стенки волновода для случая достаточно медленной волны. Очевидно, если положить $\chi_2 R \ll 1$, $\chi_0 R \ll 1$ и взять лишь первый член из разложений функций Бесселя и Ханкеля, то уравнение (35) в работе [4] переходит в $\mu \pm k = -1$, т. е. в резонансное условие Киттеля для случая цилиндра,

и все типы колебаний сливаются в один тип. В настоящей работе вследствие сложности задачи будем считать цилиндр достаточно тонким; полученный при этом результат должен совпадать с результатом, полученным в предыдущем параграфе после предельного перехода $a, b \to 0$.

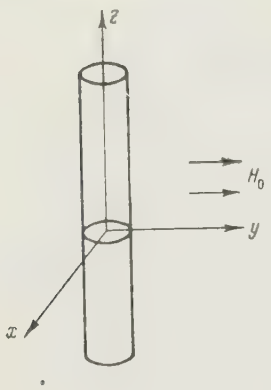


Рис. 3

Система координат, связанная с цилиндром, показана на рис. 3. Предположим, что зависимость составляющих полей от координат имеет вид

$$f(r,\ \theta)\, e^{-ihz}. \tag{10}$$

Рассмотрим случай тонкого цилиндра, т. е.

$$\begin{aligned} &|k_0 a| \ll 1, \qquad |k_0^2 a^2 \varepsilon\mu| \ll 1, \\ &|ha| \ll 1, \qquad |k_0^2 a^2 \varepsilon k| \ll 1, \end{aligned} \tag{11}$$

где $k_0 = \dfrac{2\pi}{\lambda_0}$ — волновое число в пустоте; a — радиус цилиндра; ε — диэлектрическая проницаемость феррита. Для такого случая можно считать задачу квазистатической, т. е.

$$\operatorname{rot} \vec{h} \simeq 0.$$

Следовательно, можно положить $\vec{h}_i = \operatorname{grad} \psi_i$.

Из уравнения $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ с учетом соотношения (2) следует

$$\mu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi_i + \mu \frac{\partial^2}{\partial z^2} \psi_i + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \psi_i = 0.$$

Учитывая соотношения (10), (11), можно пренебречь вторым членом в левой части этого уравнения и получить

$$\mu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi_i + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \psi_i = 0. \tag{12}$$

Решение уравнения (12) примет вид

$$\psi_i = r^{\pm n} (\cos\theta \pm i \sqrt{\mu} \sin\theta)^n.$$

Для полей внутри цилиндра следует взять лишь r^{+n}. Нетрудно вычислить составляющие поля и индукции:

$$h_{r_i} = \frac{\partial \psi_i}{\partial r} = n r^{n-1} (\cos\theta \pm i \sqrt{\mu} \sin\theta)^n,$$

$$h_{\theta_i} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_i}{\partial \theta} = n r^{n-1} (\cos\theta \pm i \sqrt{\mu} \sin\theta)^{n-1} (-\sin\theta \pm i \sqrt{\mu} \cos\theta),$$

$$B_{r_i} = (\mu \cos^2\theta + \sin^2\theta) H_{r_i} + (1 - \mu) \sin\theta \cos\theta H_{\theta_i} =$$

$$= n\mu r^{n-1} (\cos\theta \pm i \sqrt{\mu} \sin\theta)^{n-1} \left(\cos\theta \pm \frac{i \sin\theta}{\sqrt{\mu}} \right).$$

Следовательно, при построении потенциалов собственных колебаний цилиндра, которые должны удовлетворять граничным условиям

на поверхности цилиндра, надо взять ряд

$$\psi_i = \sum_{p=0}^{N} \{A_{n-2p} r^{n-2p} (\cos\theta + i\sqrt{\mu}\sin\theta)^{n-2p} + \\ + B_{n-2p} r^{n-2p} (\cos\theta - i\sqrt{\mu}\sin\theta)^{n-2p}\}.$$

Потенциал вне цилиндра имеет вид

$$\psi_e = \sum_{p=0}^{N} \{C_{n-2p} r^{-n+2p} (\cos\theta + i\sin\theta)^{n-2p} + D_{n-2p} r^{-n+2p} (\cos\theta - i\sin\theta)^{n-2p}\}.$$

Для выполнения граничных условий надо приравнять ψ_i, ψ_e и B_{r_i}, B_{r_e} на поверхности цилиндра. Очевидно, резонансные условия определяются первыми членами, содержащими $\cos^n\theta$ и $\sin\theta\cos^{n-1}\theta$. Это следует из того, что в эти члены входят лишь коэффициенты A_n, B_n, C_n, D_n. Поэтому при выполнении граничных условий получаем систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными A_n, B_n, C_n, D_n, которая полностью определяет резонансные условия. Остальные уравнения не влияют на резонансные условия: они определяют лишь коэффициенты A_{n-2p}, B_{n-2p}, C_{n-2p}, D_{n-2p} $(p = 1, 2, \ldots, N)$.

Легко показать, что

$$(\cos\theta \pm i\sqrt{\mu}\sin\theta)^n = \\ = \Big(\sum_s C_n^{2s}\mu^s\Big)\cos^n\theta \pm i\Big(\sum_s C_n^{2s+1}\sqrt{\mu}\,\mu^s\Big)\sin\theta\cos^{n-1}\theta + \text{другие члены},$$

$$\sum_s C_n^{2s}\mu^s = \frac{(1+\sqrt{\mu})^n + (1-\sqrt{\mu})^n}{2}, \qquad (13)$$

$$\sum_s C_n^{2s+1}\sqrt{\mu}\,\mu^s = \frac{(1+\sqrt{\mu})^n - (1-\sqrt{\mu})^n}{2}.$$

Тогда выражения для потенциалов и составляющих индукции могут быть преобразованы следующим образом:

$$\psi_i = \frac{(A_n + B_n)}{2}[(1+\sqrt{\mu})^n + (1-\sqrt{\mu})^n] r^n\cos^n\theta + \\ + \frac{(A_n - B_n)\,i}{2}[(1+\sqrt{\mu})^n - (1-\sqrt{\mu})^n] r^n\sin\theta\cos^{n-1}\theta + \text{другие члены},$$

$$\psi_e = (C_n + D_n) r^{-n} 2^{n-1}\cos^n\theta + \\ + (C_n - D_n) r^{-n} 2^{n-1} i\sin\theta\cos^{n-1}\theta + \text{другие члены},$$

$$B_{r_e}|_{r=a} = n\sqrt{\mu}\,a^{n-1}\Big[\frac{(A_n + B_n)}{2}\{(1+\sqrt{\mu})^n - (1-\sqrt{\mu})^n\}\cos^n\theta + \\ + \frac{i\,(A_n - B_n)}{2}\{(1+\sqrt{\mu})^n + (1-\sqrt{\mu})^n\}\sin\theta\cos^{n-1}\theta\Big] + \text{другие члены},$$

$$B_{r_l}|_{r=a} = -na^{-n-1}2^{n-1}[(C_n + D_n)\cos^n\theta + \\ + i\,(C_n - D_n)\sin\theta\cos^{n-1}\theta] + \text{другие члены}.$$

Удовлетворив граничным уравнениям, получим условия резонанса:

а) при $A_n = B_n$

$$(1 + \sqrt{\mu})^{n+1} + (1 - \sqrt{\mu})^{n+1} = 0,$$

б) при $A_n = -B_n$

$$(1 + \sqrt{\mu})^{n+1} - (1 - \sqrt{\mu})^{n+1} = 0.$$

Можно также записать эти условия вместе:

$$(1 + \sqrt{\mu})^{n+1} \pm (1 - \sqrt{\mu})^{n+1} = 0 \qquad (n \neq 0). \tag{14}$$

По формуле (14) можно вычислить резонансное условие для любых типов колебаний. Важно отметить, что спектр колебаний лежит в области отрицательных значений μ. Отметим также, что при $n = 1$ $A_1 = B_1$, и мы получим резонансное условие вида $\mu = -1$, что совпадает с результатом Киттеля для однородной прецессии при соответствующем выборе коэффициентов размагничивания.

Если положить $n = 2$, $A_2 = -B_2$, то резонансное условие имеет вид $\mu = -3$, что совпадает с решением (9) после предельного перехода $a/b \to 0$.

В заключение выражаю благодарность А. А. Пистолькорсу за руководство работой.

Выражаю глубокую признательность Я. А. Моносову и А. В. Вашковскому за ряд ценных советов.

ЛИТЕРАТУРА

1. L. R. Walker, Phys. Rev., 1957, **105**, 2, 390.
2. Е. В. Гобсон, Теория сферических и эллипсоидальных функций, перев. с англ., ИЛ, 1952, стр. 405.
3. И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев, Справочник по математике ГИТТЛ, 1954, стр. 184.
4. В. В. Никольский, Радиотехника и электроника, 1960, 5, 1, 39.

Поступила в редакцию
19 I 1961

1961 № 12

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН ТИПА H_{0n} В КОЛЬЦЕВОМ ВОЛНОВОДЕ С ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКОЙ И МЕТАЛЛИЧЕСКИМ КОЖУХОМ

И. П. Котик, А. Н. Сивов

Определены коэффициенты отражения и прохождения плоской электромагнитной волны при наклонном падении на плоскую решетку в случае, когда вектор $\vec{E}$ параллелен проводам решетки. Период решетки предполагается малым по сравнению с длиной волны. Учтены форма провода и диэлектрическое заполнение, различное, вообще говоря, по разные стороны от решетки. Найдены поля вблизи проводников. Полученные для этого случая эквивалентные граничные условия использованы для анализа распространения волн H_{0n} в кольцевом волноводе с диэлектрической оболочкой и металлическим кожухом. Найдены затухание, вызванное потерями в диэлектрическом слое, и поправка к фазовой скорости по сравнению с гладкой трубой. При толщинах диэлектрика $d = m\frac{\lambda}{2}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon'-1}}$ $(m = 1, 2,...)$ наблюдается резкое возрастание затухания, которое объясняется возникновением резонанса в области между периодической структурой и кожухом.

1. ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПЛОСКОЙ РЕШЕТКИ

В работе [1] рассмотрено падение плоской электромагнитной волны на частую решетку в случае, когда вектор $\vec{H}$ параллелен проводам, а диэлектрическое заполнение различно по разные стороны от решетки.

В настоящей работе анализируется случай, когда электрическое поле в падающей на решетку волне параллельно проводам. В предположении малости периода p по сравнению с длиной волны λ нужно найти прошедшее и отраженное поля, поля вблизи проводников и получить эквивалентные действию решетки граничные условия.

Введем прямоугольную систему координат (x, ξ, y), следующим образом связанную с решеткой. Ось ox перпендикулярна проводам и лежит в плоскости решетки; $o\xi$ направлена вдоль проводов и проходит через центр сечения одного из них; oy совпадает с нормалью к плоскости решетки. Пространство над $(y > 0)$ и под $(y < 0)$ решеткой заполнено однородными диэлектриками с диэлектрическими проницаемостями ε_2 и ε_1. Во всем пространстве $\mu = 1$. Решетка образована параллельными идеально проводящими цилиндрическими проводниками произвольной формы поперечного сечения, имеющей, однако, две оси симметрии ox и oy. Зависимость полей от времени примем в форме $e^{i\omega t}$. Так как направления распространения волн перпендикулярны проводам, а решетка однородна в направлении ξ, то поля не зависят от координаты ξ $(\partial \ldots /\partial\xi \equiv 0)$ и задача будет плоской. Согласно уравнениям Максвелла отличные от нуля составляющие поля выражаются через E_ξ следующим образом:

$$H_x = \frac{1}{ik}\frac{\partial E_\xi}{\partial y}, \quad H_y = \frac{1}{ik}\frac{\partial E_\xi}{\partial x}, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}. \tag{1}$$

Для E_ξ получаем уравнение Гельмгольца $\nabla^2 E_\xi + k^2\varepsilon_j E_\xi = 0$ с граничным условием на контуре провода $E_\xi = 0$. На рис. 1 выделен типичный участок

поля, ограниченный контурами Γ_1 ($5' - 4' - 3' - 2 - 3 - 4 - 5$) и Γ_2 ($4 - 3 - \bar{2}' - 3' - 4' - 5$). Со стороны $y' < 0$ (см. рис. 1) под углом φ_1 на решетку набегает плоская волна. Отраженная волна уходит в отрицательном направлении оси y'', прошедшая волна распространяется под углом преломления φ_2 ($\sin\varphi_2 = \sin\varphi_1 \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}$) и в положительном направлении оси $\bar{y}'$. Участки $5' - 5$ и $\bar{5}' - \bar{5}$ находятся от решетки на расстояниях, обеспечивающих формирование полей плоских волн.

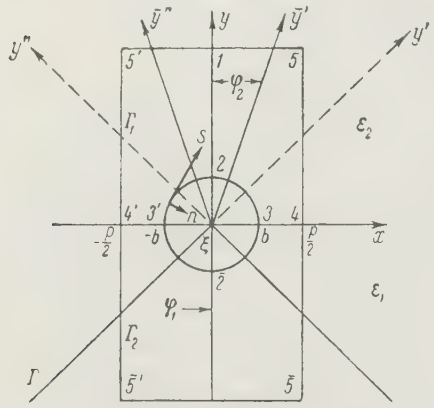


Рис. 1

а) Связь полей в удаленных зонах с полями на контуре провода и на плоскости $y = 0$. Для отыскания связи между полями в удаленных зонах (участки $5' - 5$ и $\bar{5}' - \bar{5}$) и полями вблизи проводников применим лемму Лоренца (см., например, [2]) к контурам Γ_1 и Γ_2. В качестве вспомогательных полей, фигурирующих в лемме, возьмем поля плоских волн в пространстве без решетки с плоской границей раздела диэлектриков при $y = 0$. Направления распространения вспомогательных волн выберем так, чтобы они были «встречными» по отношению к истинным полям, т. е. поле E^1, H^1 (встречное по отношению к отраженной волне) есть поле волны, падающей на границу раздела в положительном направлении оси y''; поле E^2, H^2 (встречное по отношению к прошедшей волне) есть поле волны, падающей на границу раздела с противоположной стороны в отрицательном направлении оси $\bar{y}'$ (см. рис. 1). Обозначим $\alpha_i = \sin\varphi_i$; $\beta_i = \cos\varphi_i$. Запишем выражения для истинных полей в удаленных зонах и для вспомогательных полей:

$$
\begin{aligned}
&y > 0: \quad E_\xi = T e^{-ik\sqrt{\varepsilon_2}\,\bar{y}'},\\
&y < 0: \quad E_\xi = e^{-ik\sqrt{\varepsilon_1}\,y'} + R e^{ik\sqrt{\varepsilon_1}\,y''},\\
&y \geqslant 0: \quad E^1_\xi = T_1 e^{-ik\sqrt{\varepsilon_2}\,\bar{y}''}, \quad E^2_\xi = e^{ik\sqrt{\varepsilon_2}\,\bar{y}'} + R_2 e^{-ik\sqrt{\varepsilon_2}\,\bar{y}''},\\
&y \leqslant 0: \quad E^1_\xi = e^{-ik\sqrt{\varepsilon_1}\,y''} + R_1 e^{ik\sqrt{\varepsilon_1}\,y'}, \quad E^2_\xi = T_2 e^{ik\sqrt{\varepsilon_1}\,y'}.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Здесь R и T — искомые коэффициенты отражения и прохождения; R_i и T_i — коэффициенты отражения и прохождения для вспомогательных полей, которые находятся из простой задачи о падении плоской E-поляризованной волны на плоскую границу раздела двух однородных диэлектриков:

$$
R_1 = \frac{\sqrt{\varepsilon_1}\beta_1 - \sqrt{\varepsilon_2}\beta_2}{\sqrt{\varepsilon_1}\beta_1 + \sqrt{\varepsilon_2}\beta_2}; \quad T_1 = \frac{2\sqrt{\varepsilon_1}\beta_1}{\sqrt{\varepsilon_1}\beta_1 + \sqrt{\varepsilon_2}\beta_2},
\tag{3}
$$

$$
R_2 = -R_1; \qquad T_2 = T_1 \frac{\sqrt{\varepsilon_2}\beta_2}{\sqrt{\varepsilon_1}\beta_1}.
$$

На прямых $\overline{5'}-5$ и $\overline{5}-5$ выполняются соотношения

$$H\left(\frac{p}{2}\right)=H\left(-\frac{p}{2}\right)e^{-\gamma},\quad E\left(\frac{p}{2}\right)=E\left(-\frac{p}{2}\right)e^{-\gamma},$$
$$H^i\left(\frac{p}{2}\right)=H^i\left(-\frac{p}{2}\right)e^{\gamma},\quad E^i\left(\frac{p}{2}\right)=E^i\left(-\frac{p}{2}\right)e^{\gamma}, \tag{4}$$
$$\gamma=ik\sqrt{\varepsilon_1}\alpha_1 p.$$

Это приводит к исчезновению интегралов по вертикальным участкам. В результате приходим к искомым соотношениям, связывающим поля в удаленной зоне с полями вблизи проводников:

$$\int\limits_{(5'-5)}(E^i_\xi H_x-E_\xi H^i_x)\,dx=\int\limits_{(3'-2-3)}E^i_\xi H_s ds+\int\limits_{(4'-3'),\,(3-4)}(E^i_\xi H_x-E_\xi H^i_x)\,dx,$$
$$\int\limits_{(\overline{5'}-\overline{5})}(E_\xi H^i_x-E^i_\xi H_x)\,dx=\int\limits_{(3-\overline{2}-3')}E^i_\xi H_s ds-\int\limits_{(4'-3'),\,(3-4)}(E^i_\xi H_x-E_\xi H^i_x)\,dx. \tag{5}$$

Подставляя в левые части (5) выражения для полей из (2), получаем

$$0=\int\limits_{(3'-2-3)}E^1_\xi H_s ds+\int\limits_{(4'-3'),\,(3-4)}(E^1_\xi H_x-E_\xi H^1_x)\,dx,$$
$$2\sqrt{\varepsilon_1}\beta_1 p\,(R_1-R)=\int\limits_{(3-\overline{2}-3')}E^1_\xi H_s ds-\int\limits_{(4'-3'),\,(3-4)}(E^1_\xi H_x-E_\xi H^1_x)\,dx, \tag{6}$$
$$-2\sqrt{\varepsilon_2}\beta_2 pT=\int\limits_{(3'-2-3)}E^2_\xi H_s ds+\int\limits_{(4'-3'),\,(3-4)}(E^2_\xi H_x-E_\xi H^2_x)\,dx,$$
$$2\sqrt{\varepsilon_1}\beta_1 pT_2=\int\limits_{(3-\overline{2}-3')}E^2_\xi H_s ds-\int\limits_{(4'-3'),\,(3-4)}(E^2_\xi H_x-E_\xi H^2_x)\,dx.$$

Таким образом, коэффициенты R и T выражены через поля на контуре провода:

$$2\sqrt{\varepsilon_1}\beta_1 p\,(R_1-R)=\oint\limits_C E^1_\xi H_s ds,$$
$$2\sqrt{\varepsilon_2}\beta_2 p\,(T_1-T)=\oint\limits_C E^2_\xi H_s ds. \tag{7}$$

б) Поля вблизи проводов. Замена волнового уравнения уравнением Лапласа приводит в нашем случае к ошибке порядка $(kp)^2$; поэтому если найдено решение уравнения $\nabla^2 E=0$ с точностью до членов порядка $(kp)^2$, то можно считать, что оно представляет собой с той же точностью истинное поле. Это решение, как следует из (5), будет использовано лишь на контуре провода и на линии $y=0$ между проводами. Итак, нужно найти решение E_ξ уравнения Лапласа с точностью до членов порядка $(kp)^2$, удовлетворяющее требованиям: 1) величины E_ξ и $\partial E_\xi/\partial y$ прерывны на $(4'-3')$, $(3-4)$; 2) $E_\xi=0$ на контуре провода. Воспользовавшись результатами работы [3] (см. формулы (25) — (28)), выполненной в предположении $\varepsilon_2=\varepsilon_1=1$ (заметим, что в настоящей постановке параметры диэлектриков не участвуют), можно записать выражение для поля вблизи проводников через две произвольные пока постоянные A и B в виде

$$E_\xi=(Ay_2+By_3)(1-ik\sqrt{\varepsilon_1}\alpha_1 x_2), \tag{8}$$

где $y_2(x, y)$, $y_3(x, y)$, $x_2(x, y)$— мнимые и реальные части некоторых конформных преобразований, соответствующих выбранной форме проводов (определение преобразований см. в [3]).

в) Определение искомых величин. Подставляя выражение (8) в первое и четвертое уравнения (6), находим постоянные A и B, после чего, используя определенное теперь поле вблизи проводников, находим из (7) искомые коэффициенты отражения и прохождения:

$$A = -\frac{2ik\sqrt{\varepsilon_1}\beta_1}{G_2}\frac{1}{\frac{G_1}{G_2}+\frac{D_1}{D_2}}, \qquad B = \frac{2ik\sqrt{\varepsilon_1}\beta_1}{D_2}\frac{1}{\frac{G_1}{G_2}+\frac{D_1}{D_2}}, \tag{9}$$

$$R = -\frac{\frac{\overline{G_2}}{G_2}+\frac{\overline{D_2}}{D_2}}{\frac{G_1}{G_2}+\frac{D_1}{D_2}}T_1 + R_1, \qquad T = \frac{\frac{\overline{G_1}}{G_2}-\frac{\overline{D_1}}{D_2}}{\frac{G_1}{G_2}+\frac{D_1}{D_2}}T_1. \tag{10}$$

Здесь

$$G_n = 1 + ik\sqrt{\varepsilon_n}\beta_n l_2, \qquad D_n = 1 + ik\sqrt{\varepsilon_n}\beta_n l_3, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

$$\overline{G}_n = 1 - ik\sqrt{\varepsilon_n}\beta_n l_2, \qquad \overline{D}_n = 1 - ik\sqrt{\varepsilon_n}\beta_n l_3.$$

Параметры l_2 и l_3, зависящие от формы и относительных размеров проводов, находятся из конформных преобразований. Для проводов круглого поперечного сечения результаты расчета параметров l_2/p, l_3/p, полученные при помощи преобразования Блоха [4], приведены на рис. 2 в функции от коэффициента заполнения $q = 2b/p$. Рассмотрим предельные случаи в формулах (10).

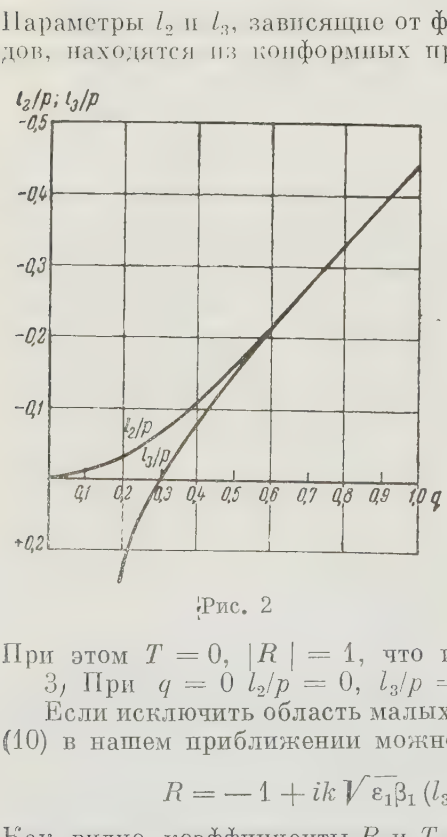


Рис. 2

1) При $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$ выражения (9) и (10) переходят в формулы (32) и (33) работы [3] для случая отсутствия зависимости полей от координаты ξ.

2) При $q = 1$ (решетка превращается в гофрированную поверхность) $l_2 = l_3$ и получаем

$$R = -\frac{1 - ik\sqrt{\varepsilon_1}\beta_1 l_2}{1 + ik\sqrt{\varepsilon_1}\beta_1 l_2} \simeq -e^{-2ik\sqrt{\varepsilon_1}\beta_1 l_2} \tag{11}$$

При этом $T = 0$, $|R| = 1$, что и следовало ожидать.

3) При $q = 0$ $l_2/p = 0$, $l_3/p = \infty$, поэтому $R = R_1$, $T = T_1$.

Если исключить область малых q, где параметр l_3/p велик, то формулы (10) в нашем приближении можно переписать в виде

$$R = -1 + ik\sqrt{\varepsilon_1}\beta_1(l_3 + l_2), \quad T = ik\sqrt{\varepsilon_1}\beta_1(l_3 - l_2). \tag{12}$$

Как видно, коэффициенты R и T, определяемые этими формулами, не зависят от параметров внешнего диэлектрика, что является следствием ничтожного $\left(\text{порядка } kp\left(\frac{l_3}{p} - \frac{l_2}{p}\right)\right)$ просачивания поля во внешнюю область. Найденные коэффициенты отражения и прохождения позволяют записать граничные условия, эквивалентные действию реальной решетки

$$E_{\xi 2} - E_{\xi 1} = ikl_2(H_{x2} + H_{x1}),$$

$$E_{\xi 2} + E_{\xi 1} = ikl_3(H_{x2} - H_{x1}). \tag{13}$$

Первое граничное условие означает наличие магнитного тока по оси x, второе — наличие электрического тока по оси ξ. Как следует из сравнения с формулой (34) работы [3], граничные условия не изменяют своего вида при рассмотрении задачи с границей раздела диэлектрика. Условия (13) могут быть использованы для анализа распространения волн H_{0n} в периодических волноводах.

2. ВОЛНЫ H_{0n} В КОЛЬЦЕВОМ ВОЛНОВОДЕ С ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКОЙ И МЕТАЛЛИЧЕСКИМ КОЖУХОМ

Для анализа распространения волн H_{0n} в кольцевом волноводе с диэлектрической оболочкой и экраном (рис. 3) воспользуемся граничными условиями (13), записанными в цилиндрической системе координат r, φ, z:

$$E'_{\varphi 1} - E_{\varphi 2} = ikl_2 (H_{z1} + H_{z2}),$$
$$E_{\varphi 1} + E_{\varphi 2} = ikl_3 (H_{z1} - H_{z2}), \tag{14}$$

которые должны выполняться на периодической структуре, т. е. при $r = a$, и условием на экране $E_{\varphi 2} = 0$ при $r = b\,(b - a = d)$. В области $a < r < b$ диэлектрическая проницаемость имеет значение $\varepsilon = \varepsilon' - i\varepsilon''$, для внутренней области $(0 < r < a)$ $\varepsilon = 1$. Подставляя выражения для составляющих полей

$$H_{z1} = \alpha^2 J_0 (\alpha r) A_1,$$
$$H_{z2} = \beta^2 (A_2 J_0 (\beta r) + B_2 N_0 (\beta r)), \tag{15}$$
$$E_{\varphi 1} = -ik\alpha J_1 (\alpha r) A_1,$$
$$E_{\varphi 2} = -ik\beta (A_2 J_1 (\beta r) + B_2 N_1 (\beta r))$$

(здесь $\alpha = \sqrt{k^2 - h^2}$; $\beta = \sqrt{k^2\varepsilon - h^2}$; $h = h' - ih''$ — постоянная распространения) в граничные условия и исключив постоянные, получаем

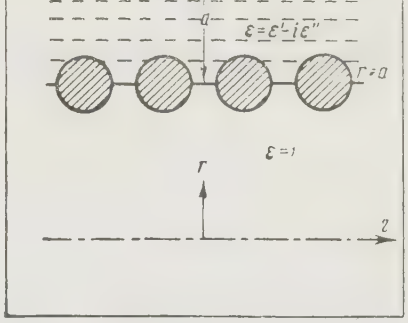


Рис. 3

дисперсионное уравнение. Пользуясь асимптотическим представлением специальных функций от аргументов βa и βb, что допустимо для больших ka и $|\varepsilon - 1| > 1$, можно записать дисперсионное уравнение в виде

$$\left(\frac{J_2(\alpha a)}{J_0(\alpha a)} + \alpha \frac{l_3 + l_2}{2}\right)\left(\operatorname{tg} \beta d + \beta \frac{l_3 + l_2}{2}\right) = \frac{(l_3 - l_2)^2}{4} \alpha\beta. \tag{16}$$

При $q = 1\,(l_3 = l_2)$ получаем уравнение для гофрированного волновода с неглубокой гофрой

$$\frac{J_1(\alpha a)}{J_0(\alpha a)} = -\alpha l_2. \tag{17}$$

Найденная методом возмущения фазовая постоянная равна

$$h = h_0 + \frac{p}{a} \frac{l_2}{p} \frac{\mu^2}{h_0 a^2}; \quad J_1(\mu) = 0; \quad h_0 = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\mu}{a}\right)^2}. \tag{18}$$

Так как просачивание поля в область $a < r < b$ при немалых q обычно ничтожно $\left(\text{пропорционально малой величине } kp\left(\frac{l_3}{p} - \frac{l_2}{p}\right)\right)$, то

естественно, что оно внесет малую добавку в изменение фазовой по стоянной; поэтому формулой (18) можно пользоваться и для $q \neq 1$. Для затухания, вызванного потерями в диэлектрике, получаем формулу

$$h'' = \frac{(l_3 - l_2)^2}{4} \frac{\mu^2}{h_0 a^4} \operatorname{Im}\left[\frac{\beta_0 a}{\operatorname{tg} \beta_0 d + \beta_0 l_2}\right], \tag{19}$$

$$\beta_0 = \sqrt{k^2 \varepsilon - h_0^2}.$$

При $d \to \infty$ $\operatorname{tg} \beta_0 d \to -i$ ($\varepsilon'' \neq 0$) и формула (19) переходит в формулу (1) работы [5], определяющую потери в кольцевом волноводе с бесконечной диэлектрической оболочкой. Если предположить, что $\varepsilon'' \ll \varepsilon' - 1$ и пренебречь величинами $\mu^2, \mu^2 (l_2/a)^2, \mu^2 (d/a)^2$ по сравнению с величинами $(ka)^2 (\varepsilon' - 1)$, $(kl_2)^2 (\varepsilon' - 1)$, $(kd)^2 (\varepsilon' - 1)$ соответственно, то можно записать формулу для относительного (по отношению к потерям в кольцевом волноводе с бесконечной диэлектрической оболочкой) затухания в виде

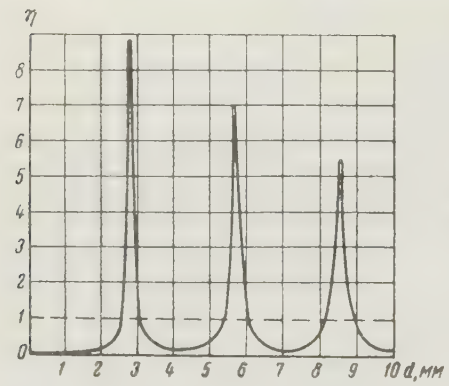


Рис. 4

$$\eta = \frac{h''(d)}{h''(d = \infty)} = \frac{2}{x} \frac{Q (x \operatorname{sh} 2yd - y \sin 2xd)}{[\sin 2xd + 2xl_2 Q]^2 + [\operatorname{sh} 2yd + 2yl_2 Q]^2}, \tag{20}$$

$$x = k\sqrt{\varepsilon' - 1}, \quad y = k \frac{\varepsilon''}{2\sqrt{\varepsilon' - 1}}, \quad Q = \operatorname{sh}^2 yd + \cos^2 xd.$$

Результаты расчета относительного затухания для значений параметров $a = 30$ *мм*, $\lambda = 8$ *мм*, $\varepsilon' = 3$, $\varepsilon'' = 0{,}1$, $q = 0{,}5$, $p = 0{,}3$ *мм* в функции d представлены на рис. 4. При толщинах диэлектрика $d = \frac{\lambda}{4}(2m+1) \times$

$\times \frac{1}{\sqrt{\varepsilon' - 1}}$ имеем минимумы $\eta = \operatorname{th} yd$. При $d = \frac{\lambda}{2} m \frac{1}{\sqrt{\varepsilon' - 1}}$ имеем

$\eta = \operatorname{tg} yd/(l_2 x)^2 + (\operatorname{th} yd + l_2 y)^2$. В этих точках наблюдается увеличение относительного затухания. Это явление можно объяснить следующим образом. Тангенциальное электрическое поле всегда равно нулю при $r = b$ (стенка кожуха) и весьма мало при $r = a$, т. е. на поверхности кольцевого волновода; когда толщина диэлектрика такова, что в ней укладывается целое число половин длин волн, возникает резонанс в области между периодической структурой и экраном, сопровождающийся накоплением энергии в этой области, что и приводит к возрастанию затухания. Значительное уменьшение относительного затухания при толщинах диэлектрика, отличающихся от «резонансных», можно объяснить дополнительным поступлением энергии обратно во внутреннюю область за счет многократных отражений в диэлектрическом слое, несмотря на малую связь между областями.

В заключение авторы статьи выражают глубокую признательность Б. З. Кацепеленбауму за ценные советы, сделанные им при выполнении настоящей работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Сивов, Падение плоской электромагнитной волны на плоскую решетку (случай, когда вектор H параллелен проводам), Радиотехника и электроника, 1961, 6, 1, 58.
2. Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, Изв. Советское радио, 1957, стр. 418.
3. А. Н. Сивов, Электродинамическая теория частой плоской решетки из параллельных проводов, Радиотехника и электроника, 1961, 6, 4, 483.
4. Э. Блох, Исследование плоской решетки, составленной из теоретических профилей конечной толщины, Тр. ЦАГИ, 1947, № 611.
5. Б. З. Каценеленбаум, Затухание волн H_{0n} в спиральном волноводе. Радиотехника и электроника, 1959, 4, 3, 428.

Поступила в редакцию
17 IV 1961

1961 № 12

О ПРИМЕНЕНИИ ЛЕММЫ ЛОРЕНЦА ДЛЯ ПРИБЛИЖЕННОГО РАСЧЕТА ПОСТОЯННЫХ РАСПРОСТРАНЕНИЯ В ЭЛЕКТРОННОМ ПРИБОРЕ ТИПА ЛАМПЫ С ПОПЕРЕЧНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

Л. Н. Лошаков

Описан приближенный метод получения характеристического уравнения для лампы с поперечным взаимодействием, основанный на применении леммы Лоренца и допущениях, аналогичных принятым ранее в теории ЛБВ.

ВВЕДЕНИЕ

В статьях [1, 2] изложена теория волноводной модели лампы с поперечным взаимодействием (ЛПВ), основанная на применении конкретной физической модели замедляющей системы в виде волновода, заполненного диэлектриком. Эта теория позволила установить ряд основных свойств исследуемого прибора.

Представляет, однако, интерес получение более общих соотношений, характеризующих работу ЛПВ, не связанных жестко с конкретным типом замедляющей системы. При некоторых допущениях такая более общая теория ЛПВ может быть построена при помощи леммы Лоренца (сопряженной леммы) подобно развитой ранее теории обычной лампы бегущей волны (ЛБВ) с взаимодействием в продольном направлении [3, 4].

В настоящей статье описан расчет, произведенный применительно к классу замедляющих систем, электромагнитные процессы в которых, в отсутствие электронного потока, приближенно могут описываться при помощи одной гармонической волны, распространяющейся вдоль системы. Это означает, что существование совокупности пространственных гармоник не будет учитываться. Несмотря на указанное ограничение, изложенные ниже результаты по сравнению с теорией волноводной модели ЛПВ имеют более общий характер.

1. ПОЛУЧЕНИЕ ОСНОВНОГО УРАВНЕНИЯ

Для максимального упрощения расчета предположим, что ЛПВ имеет замедляющую систему, процесс распространения волн в которой целесообразно описывать в прямоугольной системе координат. Будем считать, что ось z совпадает с направлением распространения энергии и электронный поток движется вдоль поперечной оси x *.

Пренебрежем потерями и применим сопряженную лемму

$$\int_S ([\vec{E}_I \vec{H}^*_{II}] + [\vec{E}^*_{II} \vec{H}_I])\, \vec{n} dS = -\int_V \vec{i}_I \vec{E}^*_{II} dV \qquad (1$$

к выделенному внутри замедляющей системы малому объему $V = bdxdz$, ограниченному поверхностью S, полагая, что электронный поток в направлении оси y занимает участок от $y = b_1$ до $y = b_2$ (рисунок)

* Предполагается, что вдоль оси x или в обоих указанных направлениях возможно распространение медленных волн.

В формуле (1) через $\vec{E}_I$, $\vec{H}_I$ обозначены электрическое и магнитное поля в системе при наличии электронного потока с переменной составляющей плотности тока $\vec{i}_I$; через $\vec{E}_{II}$, $\vec{H}_{II}$ — поля в той же замедляющей системе в отсутствие электронного потока; $\vec{n}$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности S. Учитывая, что плотность тока $\vec{i}_I$ имеет только одну составляющую i по оси x, на основании формулы (1) в рассматриваемом случае получим

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\int_z^{z+dz} dz \int_0^b ([\vec{E}_I\vec{H}_{II}] + [\vec{E}_{II}^*\vec{H}_I])\vec{n}_x dy\right\} dx + \tag{2}$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z}\left\{\int_x^{x+dx} dx \int_0^b ([\vec{E}_I\vec{H}_{II}^*] + [\vec{E}_{II}^*\vec{H}_I])\vec{n}_z dy\right\} dz = -\int_x^{x+dx} dx \int_z^{z+dz} dz \int_{b_1}^{b_2} iE_{IIx}^* dy.$$

Из формулы (2) следует основное исходное соотношение

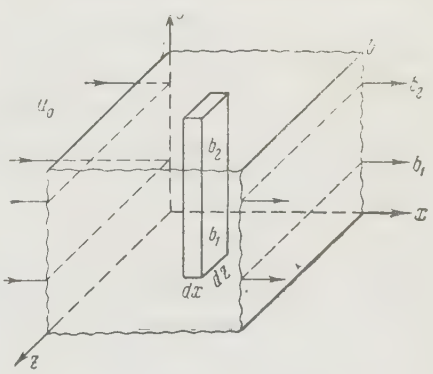
$$\frac{\partial}{\partial x}\int_0^b ([\vec{E}_I\vec{H}_{II}^*]_x + [\vec{E}_{II}^*\vec{H}_I]_x)\,dy + \frac{\partial}{\partial z}\int_0^b ([\vec{E}_I\vec{H}_{II}^*]_z + [\vec{E}_{II}^*\vec{H}_I]_z)\,dy = -\int_{b_1}^{b_2} iE_{IIx}^* dy. \tag{3}$$

Рабочим типом волны в изучаемом приборе будем считать продольно-магнитную волну LM_{mn} при $H_x = 0$ и $m \neq 0$, $n \neq 0$. Волна такого типа имеет необходимые для взаимодействия составляющие поля.

Задаваясь гармонической зависимостью от времени t в виде $e^{j\omega t}$ с угловой частотой ω по аналогии с теорией обычной ЛБВ [4], для составляющих искомого электрического поля в системе с электронным пучком принимаем выражения

$$E_{Ix} = E_{2x} + j\frac{\Gamma}{\omega\varepsilon} i,$$

$$E_{Iy} = E_{2y}, \qquad E_{Iz} = E_{2z}, \tag{4}$$



считая составляющую поля $\vec{E}_2$ вихревой. В приведенных выражениях Γ — коэффициент депрессии, при помощи которого учитывается влияние поперечных размеров электронного потока на поле объемного заряда; ε — диэлектрическая проницаемость среды; $j = \sqrt{-1}$. В расчете применяется рациональная практическая система единиц.

Соотношение (3) с учетом формул (4) можно переписать в виде

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_0^b (E_{2y}H_{IIz}^* - E_{2z}H_{IIy}^* + E_{IIy}^*H_{Iz} - E_{IIz}^*H_{Iy})\,dy +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z}\int_0^b (E_{Ix}H_{IIy}^* + E_{IIx}^*H_{Iy})\,dy = -\int_{b_1}^{b_2} iE_{IIx}^* dy. \tag{5}$$

Полученное выражение будет использовано для приближенного расчета при наличии некоторых допущений, аналогичных принятым ранее в теории обычной ЛБВ [3, 4].

Выделим из стоячей волны, существующей в поперечном сечении системы без электронного потока, волну, бегущую в направлении возможного движения электронов, и будем характеризовать ее полем $\vec{E}_{II}$, $\vec{H}_{II}$,

которое назовем вспомогательным. Полагая, что составляющая поля E_{IIx} этой волны описывается выражением

$$E_{IIx} = E_{0x}(y)\, e^{j\omega t - j\beta_0 x - j w_0 z}, \tag{6}$$

при помощи получаемых из уравнений Максвелла соотношений

$$E_{IIy} = \frac{1}{k^2 - \beta_0^2}\,\frac{\partial^2 E_{IIx}}{\partial x\,\partial y}, \qquad E_{IIz} = \frac{1}{k^2 - \beta_0^2}\,\frac{\partial^2 E_{IIx}}{\partial x\,\partial z},$$

$$H_{IIy} = \frac{j\omega\varepsilon}{k^2 - \beta_0^2}\,\frac{\partial E_{IIx}}{\partial z}, \qquad H_{IIz} = -\frac{j\omega\varepsilon}{k^2 - \beta_0^2}\,\frac{\partial E_{IIx}}{\partial y}, \tag{7}$$

где $k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$ — фазовая постоянная среды, можем выразить остальные составляющие вспомогательного поля через E_{IIx} *.

Присутствие электронного потока производит возмущение вспомогательного поля, в результате чего возникает искомое поле $\vec{E}_I$, $\vec{H}_I$. Применяя для введенной выше составляющей E_{2x} искомого поля бегущей возмущенной волны выражение

$$E_{2x} = E_{0x}(y)\, e^{j\omega t + \nu x + \gamma z} \tag{8}$$

и ограничиваясь рассмотрением случая малых сигналов, из уравнений электроники известным путем [4] находим

$$i = \frac{j\omega\varepsilon q E_{2x}}{(\nu + jk_0)^2 + \Gamma q}, \qquad E_{1x} = E_{2x} - \frac{\Gamma q E_{2x}}{(\nu + jk_0)^2 + \Gamma q}. \tag{9}$$

В формулах (9) приняты обозначения:

$$q = \frac{e i_0}{m\varepsilon u_0^3}, \qquad k_0 = \frac{\omega}{u_0}, \tag{10}$$

где e, m и u_0 — заряд, масса и постоянная составляющая скорости электрона соответственно; i_0 — постоянная составляющая плотности электронного тока.

Допустим теперь, что составляющие искомого поля $\vec{E}_2$, $\vec{H}_I$ могут быть выражены через E_{2x} по формулам вида (7) при условии зависимости полей от координат, даваемой формулой (8). Тогда при помощи формул (6) — (9) соотношение (5) после некоторых преобразований, не содержащих приближений, можно привести к виду

$$\frac{(\nu^2 - \beta_0^2)\,\omega\varepsilon}{(k^2 - \beta_0^2)^2}\int_0^b \left(\left|\frac{dE_{0x}}{dy}\right|^2 + j\gamma w_0 |E_{0x}|^2 \right) dy + \frac{(\gamma^2 + w_0^2)\,\omega\varepsilon}{k^2 - \beta_0^2}\int_0^b |E_{0x}|^2\, dy +$$

$$+ \frac{(j\gamma w_0 - w_0^2)\,\Gamma q}{(\nu + jk_0)^2 + \Gamma q}\,\frac{\omega\varepsilon}{k^2 - \beta_0^2}\int_{b_1}^{b_2} |E_{0x}|^2\, dy + \frac{\omega\varepsilon q}{(\nu + jk_0)^2 + \Gamma q}\int_{b_1}^{b_2} |E_{0x}|^2\, dy = 0. \tag{11}$$

Ограничимся рассмотрением электронного потока с достаточно малой плотностью тока (вносимое им возмущение невелико). При этом $\nu \simeq -j\beta_0$, $\gamma \simeq -jw_0$ и произведение $j\gamma w_0$, стоящее под знаком интеграла в первом члене формулы (11), можно заменить на w_0^2. Пользуясь справедливыми в отсутствие пучка соотношениями

$$\Pi_{0x} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left(E_{IIy} H_{IIz}^* - E_{IIz} H_{IIy}^*\right),$$

$$P'_{0x} = \int_0^b \Pi_{0x}\, dy = \frac{\omega\varepsilon\beta_0}{2(k^2 - \beta_0^2)^2}\int_0^b \left(\left|\frac{dE_{0x}}{dy}\right|^2 + w_0^2 |E_{0x}|^2 \right) dy, \tag{12}$$

$$\Pi_{0z} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,(E_{IIx} H_{IIy}^*), \qquad P'_{0z} = \int_0^b \Pi_{0z}\, dy = \frac{\omega\varepsilon w_0}{2\left(k^2 - \beta_0^2\right)}\int_0^b |E_{0x}|^2\, dy, \tag{13}$$

* Волна, бегущая в направлении оси x, относится к классу E.

ожно привести формулу (11) к виду

$$(\nu^2+\beta_0^2)\,[(\nu+jk_0)^2+\Gamma q]+(\gamma^2+w_0^2)\,(\nu+jk_0)^2\,N+$$

$$+\,[(\gamma^2+w_0^2)\,N+(j\gamma w_0-w_0^2)\,N_1]\,\Gamma q+q\,\frac{\omega\varepsilon\beta_0}{2P'_{0x}}\int\limits_{b_1}^{b_2}|E_{0x}|^2\,dy=0, \qquad (14)$$

де

$$N=\frac{P'_{0z}}{P'_{0x}}\,\frac{\beta_0}{w_0}; \qquad N_1=N\,\frac{\int\limits_{b_1}^{b_2}|E_{0x}|^2\,dy}{\int\limits_{0}^{b}|E_{0x}|^2\,dy}. \qquad (15)$$

При малых плотностях тока пучка третий член уравнения (14) не играет существенной роли и может быть опущен. Однако похожее слагаемое $(\nu^2+\beta_0^2)\Gamma q$ следует удержать в связи с тем, что оно может комбинировать-ся с последним членом уравнения.

С учетом сказанного уравнение (14) можно переписать в виде (16)

$$(\nu^2+\beta_0^2)\,[(\nu+jk_0)^2+\Gamma q]+(\gamma^2+w_0^2)\,(\nu+jk_0)^2\,N+\,q\,\frac{\omega\varepsilon\beta_0}{2P'_{0x}}\int\limits_{b_1}^{b_2}|E_{0x}|^2\,dy=0.$$

Последнее является искомым характеристическим уравнением, связывающим неизвестные постоянные распространения ν и γ.

2. ОБСУЖДЕНИЕ УРАВНЕНИЯ (16) И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОСТОЯННЫХ РАСПРОСТРАНЕНИЯ

Прежде всего для подтверждения уравнения (16) применим его к волноводной модели ЛПВ, рассмотренной ранее достаточно строго [1, 2], для которой характерно отсутствие влияния пучка на зависимость полей от координаты y, допущенное выше в качестве приближения. В рассматриваемом случае $b_1=0$, $b_2=b$

$$P'_{0x}=\frac{\omega\varepsilon\beta_0}{2\,(k^2-\beta_0^2)}\int\limits_{0}^{b}|E_{0x}|^2\,dy; \quad N=1,\ \Gamma=1, \qquad (17)$$

вместо уравнения (16) имеем

$$(\nu^2+\beta_0^2)\,[(\nu+jk_0)^2+q]+(\gamma^2+w_0^2)\,(\nu+jk_0)^2+q\,(k^2-\beta_0^2)=0. \qquad (18)$$

Последнее уравнение совпадает с характеристическим уравнением, полученным для волноводной модели ЛПВ (при сравнении уравнения (18) с уравнением (16) статьи [1] следует из-за различия в обозначениях положить $\beta_0=m\pi/a$).

Заметим, что уравнение (18) показывает необходимость удержания члена $(\nu^2+\beta_0^2)\Gamma q$ при упрощении уравнения (14).

При введении безразмерных величин при помощи соотношений

$$\nu=-j\beta_0\,(1+\delta), \qquad \gamma^2=-w_0^2\,(1+2\Theta), \qquad (19)$$

$$\eta=\frac{k_0}{\beta_0}, \qquad M=\frac{q}{\beta_0^2}, \qquad R=\frac{w_0^2}{\beta_0^2} \qquad (20)$$

равнение (16) принимает вид

$$\delta^4+2\,(2-\eta)\,\delta^3+[4\,(1-\eta)+(1-\eta)^2+2NR\theta-\Gamma M]\,\delta^2+2\,[(1-\eta)^2+$$

$$+\,(1-\eta)\,2NR\theta-\Gamma M]\,\delta+(1-\eta)^2\,2NR\theta+MK_c=0, \qquad (21)$$

де

$$K_c=\frac{\omega\varepsilon}{2\beta_0P'_{0x}}\int\limits_{b_1}^{b_2}|E_{0x}|^2\,dy \qquad (22)$$

— коэффициент связи между электронным потоком и замедляющей систе мой. Коэффициент связи, определяемый формулой (22), имеет выражение по смыслу близкое к формуле для коэффициента связи обычной ЛБВ причем входящие в него величины можно рассматривать отнесенными к единице длины системы. Сравнение показывает, что более общее характеристическое уравнение ЛПВ (21) формально отличается от соответствующего уравнения волноводной модели ЛПВ (формулы (27) статьи [1]) наличием множителей N и Γ при некоторых членах. В случае волноводной модели ЛПВ, как уже было отмечено, $N = \Gamma = 1$.

Значение Γ зависит от поперечных размеров электронного потока и величины связи его с замедляющей системой. Достаточно строгое определение Γ является сложным и требует специального исследования. При приближенных расчетах в ряде случаев (небольшие коэффициенты связи) по-видимому, можно применять значения Γ, полученные для собственных волн в свободном электронном пучке с заданными размерами [4].

Величина N зависит от структуры замедляющей системы. Для сложных структур значение N нужно определить.

Характеристическое уравнение ЛПВ в отличие от случая обычной ЛБВ содержит две неизвестные величины: поправочные члены к постоянным распространения δ и θ. Поэтому для отыскания постоянных распространения это уравнение следует решать совместно с граничными условиями, которые должны задаваться на поперечных границах системы. Предложенная в [1] методика расчета может быть применена и в рассматриваемом более общем случае. При одинаковых с работой [1] граничных условиях полученные ранее формулы можно непосредственно использовать после замены $m\lambda$, M и R на $\beta_0 a$, ГМ и NR соответственно во всех выражениях, за исключением произведения MK_c (a — поперечный размер системы).

В частности, для $\eta = 1$ из формулы (50) статьи [1] и формул (15), (20) и (22) следует

$$\operatorname{Re}\gamma = w_0 \frac{\beta_0 a M K_c}{16 N R} = \frac{\beta_0 a M \omega \varepsilon}{32 P'_{0z}} \int_{b_1}^{b_2} |E_{0x}|^2 dy. \qquad (23)$$

В последнее выражение не входит величина P'_{0x}.

Можно предполагать, что полученные выше результаты могут быть обобщены на случаи, когда необходимо учитывать периодическую структуру замедляющей системы. Для этого, в согласии с известной теорией ЛБВ [5, 6], под P'_{0x} и P'_{0z} следует понимать средние по времени потоки мощности на единицу длины и ширины системы соответственно, создаваемые совокупностью пространственных гармоник. При этом знак P'_{0x} и P'_{0z} может отличаться от знака фазовой постоянной рабочей пространственной гармоники в соответствующем направлении.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Н. Лошаков, К теории электронного прибора СВЧ с взаимодействием в поперечном направлении, Радиотехника и электроника, 1960, **5**, 9, 1448.
2. Л. Н. Лошаков, О коэффициенте связи между электронным потоком и замедляющей системой в приборе СВЧ с взаимодействием в поперечном направлении, Радиотехника и электроника, 1961, **6**, 5, 767.
3. Л. Н. Лошаков, Приближенный расчет постоянных распространения в линиях передачи при наличии электронного пучка, ЖТФ, 1956, **26**, 4, 809.
4. Л. Н. Лошаков, Об учете поля объемного заряда при расчете постоянных распространения в замедляющей системе в присутствии электронного пучка с помощью леммы Лоренца, Радиотехника и электроника, 1959, **4**, 4, 688.
5. Л. Н. Лошаков, Применение леммы Лоренца для определения постоянных распространения при взаимодействии электронного потока с пространственными гармониками, Радиотехника и электроника, 1957, **2**, 4, 461.
6. Л. Н. Лошаков, О целесообразной форме выражения для коэффициента связи при взаимодействии электронного потока с пространственными гармониками замедляющей системы, Радиотехника и электроника, 1961, **6**, 10, 1685.

Поступила в редакцию
4 V 1961

1961 № 12

КОМБИНАЦИОННЫЙ ШУМ В ПРОЛЕТНОМ КЛИСТРОНЕ

С. А. Корнилов

Теоретически рассмотрено влияние комбинационных эффектов на уровень шума пролетного клистрона, работающего в качестве умножителя частоты или усилителя. Полученные выводы применены для оценки отношения мощности сигнала к мощности шума в случае умножительного клистрона, двухрезонаторного усилителя и каскадного усилителя при синхронной настройке резонаторов. Обсуждены условия, при которых отношение этих мощностей максимально.

ВВЕДЕНИЕ

Целью настоящей работы является оценка влияния комбинационных эффектов на уровень шума пролетного клистрона, используемого в качестве умножителя частоты или усилителя. Этот вопрос интересен с точки зрения потери стабильности усиливаемого или преобразуемого по частоте колебания. В данной статье рассматривается действие флуктуаций скорости потока в электронном прожекторе, работающем в режиме полного пространственного заряда, и флуктуаций напряжения возбудителя.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть на вход двухрезонаторного пролетного клистрона подается колебание вида $U \sin \omega_c t_1 + V(t_1)$, где $V(t_1)$ представляет собой хаотическую составляющую напряжения. Электронный поток, поступающий ко входному резонатору клистрона, также флуктуирует; ток его равен $I_0 + i(t_1)$, а скорость $v_0 + v(t_1)$, где v_0 и I_0 — постоянные составляющие, а $v(t_1)$ и $i(t_1)$ — флуктуирующие составляющие (рис. 1).

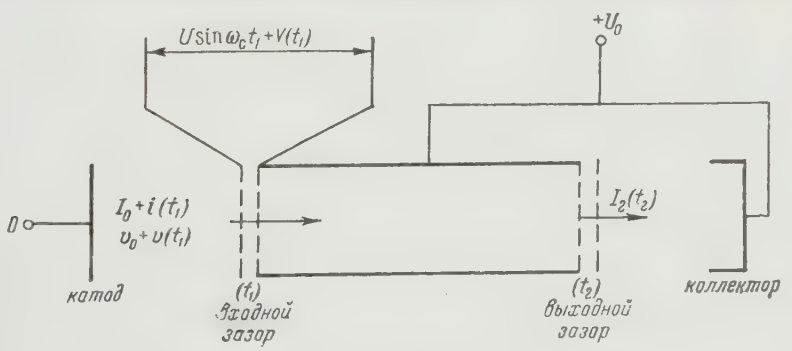


Рис. 1. Схема, поясняющая условия задачи

Распределение всех флуктуирующих величин на входе клистрона будем считать нормальным. Поставим себе задачу отыскать спектральную плотность мощности шумов на выходе клистрона в условиях нелинейной его работы, т. е. при больших значениях параметра группирования по гармоническому сигналу. Полученные результаты будут применимы, таким образом, к режимам работы клистрона в качестве усилителя мощности и умножителя частоты. Анализ проводим спектральным методом, рассматриваемую систему считаем одномерной. Объемный заряд в области дрейфа не учитывается.

2. НАЧАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ

Для того чтобы знать $i(t_1)$ и $v(t_1)$, надо задаться определенной картиной шумового процесса в электронном прожекторе. Наибольший практический интерес имеет случай работы в режиме объемного заряда. В этих условиях флуктуации, возникающие в прикатодной области, можно считать плоскими, что позволяет использовать уравнения Левеллина — Петерсона [1]. Будем считать, что электронный прожектор состоит из двух электродов — катода и анода и работает в режиме полного пространственного заряда.

Рассматривая флуктуационный процесс в ограниченном интервале времени $-T/2 - +T/2$, можно при помощи уравнений Левеллина получить связь между спектральными составляющими флуктуаций у анода и катода:

$$i_T(\omega) = j\omega T_1 I_0 e^{j\varphi(\omega)} \frac{|v_{\text{к}T}(\omega)|}{v_0}, \quad v_T(\omega) = -e^{j\varphi(\omega)} \frac{|v_{\text{к}T}(\omega)|}{v_0}, \tag{1}$$

Здесь $i_T(\omega)$, $v_T(\omega)$, $v_{\text{к}T}(\omega)$ — спектральные составляющие функций, мгновенные значения которых мы будем обозначать $i(t_1)$, $v(t_1)$, $v_{\text{к}}(t_1)$; $i(t_1)$ и $v(t_1)$ представляют собой хаотические составляющие тока и скорости у анода прожектора; $v_{\text{к}}(t_1)$ — хаотическая составляющая скорости у катода; T_1 — среднее время пролета электронов от катода к аноду; предполагается, что $\omega T_1 \geqslant 3\pi$. Фаза $\varphi(\omega)$ имеет равновероятное распределение.

Спектральная плотность среднего квадрата флуктуаций скорости у катода равна

$$g_{\text{к}} = \lim_{T\to\infty} \frac{2}{T} |v_{\text{к}T}(\omega)|^2 = \frac{4-\pi}{I_0} \frac{e}{m} kT_{\text{к}}. \tag{2}$$

Здесь k — постоянная Больцмана; $T_{\text{к}}$ — температура катода. Часто электронный прожектор имеет более сложную конструкцию, которую можно аппроксимировать диодом с последующим участком дрейфа. Если длина последнего мала сравнительно с эффективной длиной волны плазмы, то формулы (1) можно использовать и в этом случае, понимая под T_1 эффективное время пролета, равное разности времен пролета в диоде и в дрейфовом пространстве: $T_1 = T_{\text{д}} - T_{\text{др}}$.

При отступлении от такой конструкции и режима работы флуктуации тока и скорости на выходе прожектора будут определяться не только скоростным, но и токовым шумом в прикатодной области. Однако теория флуктуационных явлений в минимуме потенциала в настоящее время недостаточно развита для обоснованного учета токовых шумов. Поэтому усложнение постановки задачи едва ли будет оправдано, ибо в исходных условиях увеличится количество непроверенных допущений. Что касается поведения реальных приборов с диодным прожектором, то с точки зрения уровня шумов режим полного пространственного заряда для них благоприятен.

3. СПЕКТР КОНВЕКЦИОННОГО ТОКА НА ВЫХОДЕ КЛИСТРОНА И ОТНОШЕНИЕ МОЩНОСТИ СИГНАЛА К МОЩНОСТИ ШУМА

Конвекционный ток на выходе клистрона связан, как известно, с током на входе соотношением, вытекающим из принципа сохранения заряда:

$$I_2 = I_1 \sum_{k=1}^{k=L} \left| \frac{dt_1}{dt_2} \right|_k, \tag{3}$$

где L — порядок многозначности зависимости времени вылета t_1 от времени прилета t_2. Если ограничиться достаточно малыми значениями

U / U_0, то t_2 выражается через t_1 следующим образом;

$$t_2 = t_1 + T_0 - \frac{M_1 U T_0}{2U_0} \sin \omega_c t_1 - \frac{M_1 V(t_1) T_0}{2U_0} - \frac{M_1 V_{\text{н}}(t_1) T_0}{2U_0} - \frac{v(t_1) T_0}{v_0},$$

де U_0 — потенциал дрейфа; M_1 — коэффициент электронного взаимодействия; T_0 — среднее время пролета в пространстве дрейфа; $V_{\text{н}}(t_1)$ — напряжение, наводимое шумовым током прожектора на зазор входного контура. Представим I_2 при помощи интеграла Фурье в конечном интервале времени T. В дальнейшем, после составления необходимых нам выражений, предельным переходом $T \to \infty$ мы получим спектр среднего квадрата I_2. Обратные преобразования Фурье, относящиеся к функциям, заданным на интервале $-T/2 - +T/2$, будем отмечать индексом T. Так, для обратного преобразования (спектра) конвекционного тока I_2 получим

$$F_T(\omega) = \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} I_1 \sum_{k=1}^{k=L} \left| \frac{dt_1}{dt_2} \right|_k e^{-j\omega t_2} dt_2. \qquad (4)$$

Заменив переменную интегрирования t_2 на t_1 и используя малость флуктуирующих членов, можно представить (4) в более удобном для расчета виде:

$$F_T(\omega) = I_0 e^{-j\omega T_0} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} [1 + \beta(t_1)]\, e^{-j\left(\omega t_1 - \frac{\omega}{\omega_c} X \sin \omega_c t_1\right)} dt_1, \qquad (5)$$

где

$$\beta(t_1) = \frac{i(t_1)}{I_0} + j\omega T_0 \frac{M_1 V(t_1)}{2U_0} + j\omega T_0 \frac{M_1 V_{\text{н}}(t_1)}{2U_0} + j\omega T_0 \frac{v(t_1)}{v_0}. \qquad (6)$$

Представляя здесь $\beta(t_1)$ интегралом Фурье и раскладывая подынтегральный множитель $e^{j\frac{\omega}{\omega_c} X \sin \omega_c t_1}$ в ряд по функциям Бесселя, получим

$$F_T(\omega) = I_0 e^{-j\omega T_0} \sum_{(n)} J_n\left(\frac{\omega}{\omega_c} X\right) \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \left[1 + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f_T(\omega')\, e^{j\omega' t_1} d\omega'\right] e^{-j(\omega - n\omega_c) t_1} dt_1, \qquad (7)$$

где $X = M_1 U \omega_c T_0 / 2U_0$ — параметр группирования.

Суммирование распространяется на все целые значения n от $-\infty$ до $+\infty$. Функция $f_T(\omega')$ представляет собой спектр процесса $\beta(t_1)$, рассматриваемого в интервале $-T/2 - +T/2$:

$$f_T(\omega') = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \beta(t_1)\, e^{-j\omega' t_1} dt_1 = \frac{i_T(\omega')}{I_0} + j\omega' T_0 \frac{M_1 V_T(\omega')}{2U_0} +$$

$$+ j\omega' T_0 \frac{M_1 V_{\text{н}T}(\omega')}{2U_0} + j\omega' T_0 \frac{v_T(\omega')}{v_0}, \qquad (8)$$

где $i_T(\omega')$, $V_T(\omega')$, $V_{\text{н}T}(\omega')$, $v_T(\omega')$ — спектры соответствующих случайных функций, рассматриваемых в конечном интервале времени.

Спектр шума возбудителя для определенности будем считать равномерным; после фильтрации его входным резонатором он может быть представлен в виде $V_T(\omega') = \frac{|Z_1(\omega')|}{R_1} e^{j\varphi(\omega')} |V_T(\omega')|$. Считаем, что фаза $\psi(\omega')$ также распределена равновероятно. В последней формуле R_1 – эквивалентное сопротивление входного резонатора, а $Z_1(\omega')$ его полное сопротивление.

4. СПЕКТРАЛЬНАЯ ПЛОТНОСТЬ СРЕДНЕКВАДРАТИЧНОГО КОНВЕКЦИОННОГО ТОКА

Искомая спектральная плотность, очевидно, представляется следующим образом

$$\overline{g_i(\omega)} = \overline{\lim_{T\to\infty} \frac{2}{T} [F_T(\omega) F_T^*(\omega)]}. \qquad (9)$$

Чертой сверху обозначена операция усреднения по ансамблю, необходимость которой вытекает из статистической нестационарности рассматриваемого процесса. Меняя в (7) порядок интегрирования и подставляя полученное выражение в (9), имеем

$$\overline{\frac{g_i(\omega)}{I_0^2}} = \sum_{(n)}\sum_{(n')} J_n\left(\frac{\omega}{\omega_c} X\right) J_{n'}\left(\frac{\omega}{\omega_c} X\right) \lim_{T\to\infty} \frac{2}{T} \left\{2\pi\delta_T(\omega - n\omega_c) + \right.$$
$$+ \left. \int_{-\infty}^{+\infty} f_T(\omega') \delta_T[\omega' - (\omega - n\omega_c)]\, d\omega' \right\} \left\{2\pi\delta_T(\omega - n'\omega_c) + \right.$$
$$\left. + \int_{-\infty}^{+\infty} f_T^*(\omega') \delta_T[\omega' - (\omega - n'\omega_c)]\, d\omega' \right\}. \qquad (10)$$

Здесь $\delta_T(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} e^{j\Omega t_1} dt_1$; предел $\delta_T(\Omega)$ при $T\to\infty$ равен дельта-функции $\delta(\Omega)$. Так как на выходе клистрона имеется резонатор, настроенный, как правило, на частоту одной из гармоник сигнала, то практический интерес представляет исследование шумового спектра около частоты $N\omega_c$, где N — кратность гармоники, фильтруемой на выходе. В пределах этой полосы можно не считаться со всеми видами частотной зависимости, кроме резонансной, т. е. положить $J_\nu\left(\frac{\omega}{\omega_c} X\right) \simeq J_\nu(NX)$ и $\omega - \nu\omega_c \simeq (N-\nu)\omega_c$.

После ряда преобразований и усреднения, при котором благодаря равновероятному распределению фаз φ и ψ во флуктуационной части спектра остаются лишь члены ряда с равными индексами $n = n'$, выражение для $\overline{g_i(\omega)}$ приобретает следующий вид:

$$\overline{\frac{g_i(\omega)}{I_0^2}} = 4\pi^2 J_N^2(NX)\,\delta(\omega - N\omega_c) + \sum_{(n)} J_n^2(NX)(N-n)^2 p^2 g_к +$$
$$+ [J_{N-1}^2(NX) + J_{N+1}^2(NX)] \left|\frac{Z_1(\omega_c + \delta\omega)}{R_1}\right|^2 (q^2 g_V + s^2 g_к) +$$
$$+ [J_{N-1}^2(NX) - J_{N+1}^2(NX)] \left|\frac{Z_1(\omega_c + \delta\omega)}{R_1}\right| \cos\left(\arg Z_1 + \frac{\pi}{2}\right) ps g_к. \qquad (11)$$

Здесь $\delta\omega = \omega - N\omega_c$, причем предполагается, что $|\delta\omega| \ll \omega_c$; $p = (\Theta_1 - \Theta_0)/v_0$; $q = (M_1\Theta_0)/2U_0$; $s = M_1^2\Theta_0\Theta_1 R_1/2R_0 r_0$, где $\Theta_0 = \omega_c T_0$; $\Theta_1 = \omega_c T_1$; $R_0 = U_0/I_0$ — сопротивление луча. Спектральная плотность среднего квадрата флуктуаций скорости у катода $g_к$ определяется формулой (2), $g_V = \lim\limits_{T\to\infty} \frac{2}{T}|V_T|^2$ — спектральная плотность среднего квадрата флуктуаций напряжения возбудителя.

При выводе использовано то обстоятельство, что члены, содержащие множителем полное сопротивление входного резонатора Z_1, имеют заметную величину только вблизи от ω_c. Первый член здесь пропорционален мощности спектральной линии N-й гармоники детерминированного сигнала. Второй — спектральной плотности мощности шума на частоте ω, вызванной соответствующим участком широкополосного спектра тока и комбина-

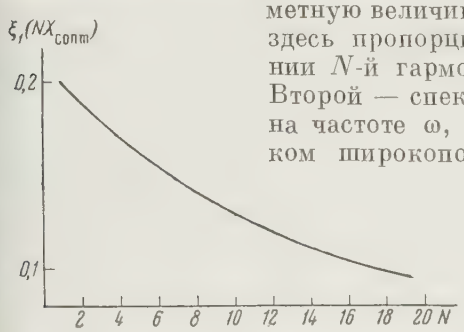


Рис. 2. Зависимость функции $\xi_1(NX)$ от N при оптимальном для каждого N значении параметра группирования

циями гармоник сигнала с частотами широкополосного шумового спектра. Третий член дает составляющую спектральной плотности шумов, связанную с влиянием узкополосной группировки шумовыми напряжениями, действующими во входном резонаторе. Это, с одной стороны, шумовое напряжение возбудителя, а с другой — напряжение, наведенное флуктуационным током прожектора. Четвертый член появился в результате корреляции между флуктуационным током и скоростью на выходе прожектора. В зависимости от знака расстройки входного резонатора он может увеличивать или уменьшать общую мощность шума, т. е. корреляция приводит к асимметрии спектра.

Сумму бесконечного ряда, входящего в выражение (11), можно вычислить, используя разложения Неймана по квадратам бесселевых функций:

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} J_n^2(z) = 1; \quad \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} n_2 J_n^2(z) = \frac{z^2}{2}.$$

Тогда для флуктуационной части спектра получим

$$\frac{\overline{g_{i\Phi}(\omega)}}{I_0^2} = \left(1 + \frac{X^2}{2}\right) N^2 p^2 g_к +$$

$$+ \frac{1}{1 + \left(2Q_1 \frac{\delta\omega}{\omega_c}\right)^2}\left[(q^2 g_V + s^2 g_к)\,\xi_1(NX) + 2Q_1 \frac{\delta\omega}{\omega_c} ps g_к \xi_2(NX)\right]. \qquad (12)$$

Здесь

$$\xi_1(NX) = J_{N-1}^2(NX) + J_{N+1}^2(NX);$$

$$\xi_2(NX) = J_{N-1}^2(NX) - J_{N+1}^2(NX);$$

$Z_1(\omega_c + \delta\omega)$ выражено через добротность входного резонатора Q_1 и относительную расстройку $\delta\omega/\omega_c$.

На рис. 2 показаны значения $\xi_1(NX)$ в зависимости от N при условии оптимального выбора параметра группировки X для каждого значения

N; $\xi_2(NX)$ в этих условиях равно нулю при любом N. Напомним, что $\overline{g_{i\phi}(\omega)}$ рассматривается в окрестности гармоник сигнала при настройке входного резонатора на частоту сигнала. На рис. 3 показана примерная картина спектра, вытекающая из формулы (12). Широкополосная часть спектра характеризуется ростом интенсивности с частотой (пропорционально N^2). Узкополосный спектр, происходящий из-за наведенных в

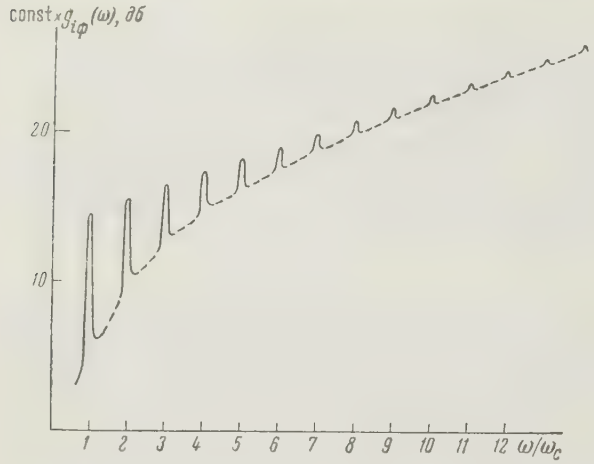


Рис. 3. Примерный вид спектра среднего квадрата конвекционного тока на выходе клистрона. Пунктиром обозначены участки спектра, не описываемые точно формулой (12), выведенной в предположении близости ω/ω_c к целым числам

входном зазоре флуктуаций и шумов возбудителя, уменьшает свою интенсивность при возрастании частоты. Спектральная плотность среднего квадрата флуктуационного напряжения на выходном зазоре определяется следующим выражением:

$$\overline{g_{u\phi}(\omega)} = \frac{M_2^2 \overline{g_{i\phi}(\omega)}\, R_2^2}{1 + \left(2Q_2 \dfrac{\delta\omega}{N\omega_c}\right)^2}. \qquad (13)$$

Здесь M_2 — коэффициент электронного взаимодействия зазора; R_2 и Q_2 — соответственно эквивалентное сопротивление и добротность выходного резонатора. Предполагается, что резонатор настроен на N-ю гармонику сигнала. Кроме $\overline{g_{i\phi}(\omega)}$ и $\overline{g_{u\phi}(\omega)}$, интересно также рассмотреть отношение мощности сигнала к спектральной плотности мощности шума на частотах, расположенных симметрично относительно частоты сигнала:

$$\gamma = \frac{2 I_0^2 J_N^2 (NX)\left[1 + \left(2\, Q_2 \dfrac{\delta\omega}{N\omega_c}\right)^2\right]}{\overline{g_{i\phi}(N\omega_c + \delta\omega)} + \overline{g_{i\phi}(N\omega_c - \delta\omega)}}. \qquad (14)$$

5. ОБСУЖДЕНИЕ РЕШЕНИЯ. ЧИСЛЕННЫЕ ПРИМЕРЫ: УМНОЖИТЕЛЬ ЧАСТОТЫ, ДВУХКОНТУРНЫЙ УСИЛИТЕЛЬ, КАСКАДНЫЙ УСИЛИТЕЛЬ ПРИ СИНХРОННОЙ НАСТРОЙКЕ

Из выражения (12) следует, что в общем случае спектр шумов асимметричен. Это является следствием воздействия входного резонатора на фазу узкополосных флуктуаций, коррелированных с широкополосными флуктуациями. Асимметрия проявляется тем сильнее, чем дальше от резонансной частоты расположена рассматриваемая полоса шумов; она исчезает при оптимальном для данного N параметре группировки, так как $\xi_2(NX_{опт}) = 0$. Уровень шумов клистрона возрастает с увеличением выходной частоты; если N постоянно, то широкополосная часть шумов растет пропорционально квадрату входной частоты. Мощность

узкополосных шумов, как следует из (12), пропорциональна четвертой степени частоты. В действительности, однако, частотная зависимость слабее, так как с изменением диапазона изменяются также параметры резонаторов, первеанс и геометрия клистронов.

Практический интерес представляют два случая: в первом из них специфика работы систем, использующих клистрон, такова, что наибольшую важность имеют шумы, спектр которых сосредоточен вблизи несущей. Во втором случае интересуются шумовыми полосами, расположенными на расстоянии нескольких десятков мегагерц от несущей. В анализе не учитывались специфические низкочастотные источники шумов (фликкер-эффект, вибрации, пульсации выпрямителя). Поэтому формулы неприменимы для расчета спектральной плотности шума очень близко от несущей. Однако они позволяют рассчитывать уровень шума в той части низкочастотного спектра, где действие указанных источников ослабевает, т. е. на расстоянии порядка 10^4—10^5 *гц* от несущей, что представляет определенный интерес в первом случае. Во втором случае результаты анализа применимы в полной мере.

Вначале рассмотрим шумы в электронном потоке, близкие к несущей (в соответствии со сказанным выше, понимая под этим расстройку порядка 10^4—10^5 *гц*). Допустим, что шумы возбудителя отсутствуют ($g_V = 0$). Тогда, используя малость $\delta\omega$, можем приближенно записать выражение (12) для $\overline{g_{i\Phi}(\omega)}$:

$$\frac{\overline{g_{i\Phi}(\omega)}}{I_0^2} \simeq \left(1 + \frac{X^2}{2}\right) N^2 p^2 g_к + \xi_1 (NX)\, s^2 g_к.$$

Подставляя сюда значения s, p и $g_к$, получим

$$\frac{\overline{g_{i\Phi}(\omega)}}{I_0^2} \simeq \left[\left(1 + \frac{X^2}{2}\right) N^2 (\Theta_1 - \Theta_0)^2 + \xi_1 (NX)\left(\frac{M_1^2 \Theta_0 \Theta_1 R_1}{2R_0}\right)^2\right] \frac{(4-\pi)\, kT_к}{2R_0}. \quad (15)$$

Приведем несколько конкретных примеров.

а) Умножительный клистрон. Рассмотрим шумовые свойства умножительного клистрона при изменении кратности умножения, достигаемой перестройкой входа при постоянной настройке выходного резонатора ($N\omega_c = \text{const}$). Зададимся параметрами, характерными для маломощного умножительного клистрона, работающего в диапазоне волн 3 *см* (см., например, [2]); $U_0 = 2000$ *в*, $I_0 = 50$ *ма*, $N\theta_1 = 100$, $N\theta_0 = 35$, $R_1 = 50$ *ком*, $M_1 = 0{,}95$, $Q_1 = 1000$, $Q_2 = 1000$. В расчете допустим некоторую условность: будем считать, что R_1 и M_1 остаются постоянными при изменении входной частоты.

На рис. 4 в логарифмическом масштабе представлены коэффициенты

$$a_1 = \left(1 + \frac{X^2}{2}\right) N^2 (\Theta_1 - \Theta_0)^2,$$

$$a_2 = \xi_1 (NX) \left(\frac{M_1^2 \Theta_0 \Theta_1 R_1}{2R_0}\right)^2,$$

характеризующие удельный вес широкополосных и узкополосных шумов при разных N; X для каждого N принимается оптимальным. Мы видим, что влияние узкополосных шумов быстро уменьшается с ростом кратности умножения. На рис. 5 показано рассчитанное по формуле (14) отношение мощности сигнала к спектральной плотности мощности шума. Оно почти не зависит от N.

Зависимость γ от параметра группировки X для $N = 10$ представлена на рис. 6. Наибольшее отношение мощности сигнала к мощности шума достигается в области оптимальной величины параметра группировки.

Рассмотрим теперь, каким образом преобразуется умножителем шум возбудителя. Допустим, что возбудитель является единственным источником шума; тогда из (12) следует, что

$$\frac{\gamma}{\gamma_в} = \frac{2 J_N^2(NX)}{X^2 \xi_1(NX)},$$

где $\gamma_в = \frac{U^2}{4 g_V}$ — отношение мощности сигнала к спектральной плотности мощности шума возбудителя. При оптимальном возбуждении $\gamma/\gamma_в$ весьма близко к единице в широком диапазоне N, т. е. отношение сигнал/шум возбудителя трансформируется умножителем без изменения вне зависимости от параметров умножителя. При рассмотрении

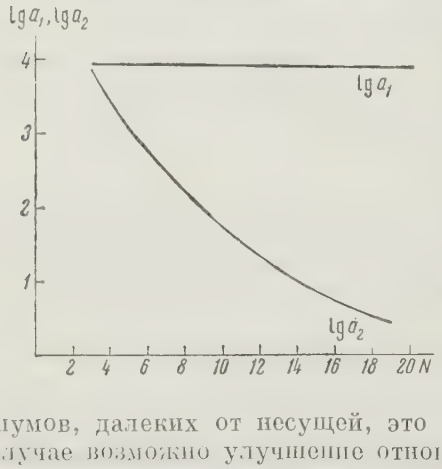


Рис. 4. Зависимость $\lg a_1$ и $\lg a_2$ от N, характеризующая удельный вес широкополосных и узкополосных шумов в умножительном клистроне при постоянной настройке выходного резонатора

шумов, далеких от несущей, это утверждение станет неверным; в этом случае возможно улучшение отношения сигнал/шум благодаря фильтрации в резонаторах.

Если умножительный клистрон работает в качестве гетеродина, требуется знать абсолютную величину мощности шума на расстоянии про-

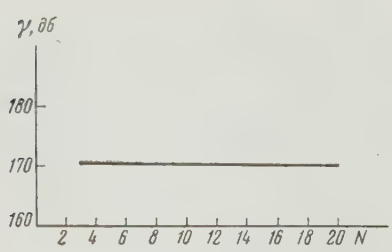


Рис. 5

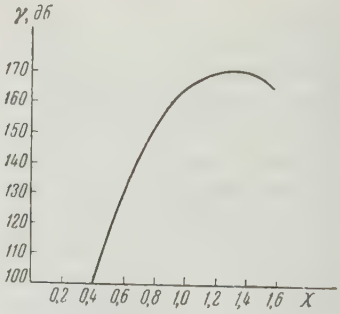


Рис. 6

Рис. 5. Зависимость отношения мощности сигнала к спектральной плотности мощности шума от N на выходе умножительного клистрона при постоянной настройке выходного резонатора

Рис. 6. Зависимость отношения мощности сигнала к спектральной плотности мощности шума от параметра группирования при десятикратном умножении частоты

межуточной частоты от несущей. При оптимальном параметре группировки спектр шума симметричен относительно несущей; поэтому достаточно рассчитать спектральную плотность в одной из зеркальных точек. Для рассматриваемого клистрона при $N = 10$ и $\delta f = 40$ *Мгц* мощность шума в полосе 1 *Мгц* имеет порядок 10^{-12} *вт*. Эта цифра получена при условии оптимальной связи выходного резонатора с нагрузкой и оптимальном параметре группировки. Шумы возбудителя не учитывались

б) Двухконтурный усилительный клистрон. Зададимся типичными параметрами усилительного клистрона средней мощности диапазона волн 3 *см* *: $U_0 = 6000\,в$, $I_0 = 450\,ма$ ($P_{\sim} = 400\,вт$), $\Re_1 = 50\,000$ *ом*, $M^2 = 0{,}55$, $\Theta_1 = 14$, $\Theta_0 = 16{,}5$. Пользуясь формулой 15) при $N = 1$, рассчитаем $\overline{g_{i\Phi}(\omega)}$ вблизи несущей, полагая, что параметр группировки оптимален ($X = 1{,}84$).

Результат:

$$\overline{g_{i\Phi}(\omega)} = (0{,}95 \cdot 10^{-23} + 0{,}48 \cdot 10^{-20})\,\frac{a^2}{гц}\,.$$

Первое слагаемое отражает роль широкополосных шумов, второе — узкополосных шумов. Спектральная плотность узкополосных шумов на три

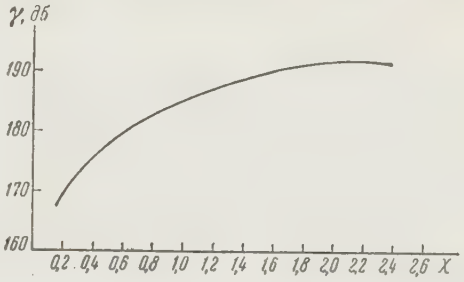


Рис. 7. Зависимость отношения мощности сигнала к спектральной плотности мощности шума от параметра группирования для двухрезонаторного усилительного клистрона

порядка выше. В данном случае такое значительное различие обусловлено близостью Θ_1 и Θ_0, разность которых определяет величину спектральной плотности широкополосных шумов. Однако если даже один из этих углов мал сравнительно с другим, узкополосные шумы остаются на порядок выше широкополосных. Это типично для усилительного клистрона. Этой величине соответствует $\gamma = 192\,дб$ (формула (14)). Эта цифра значительно лучше, чем в рассмотренном ранее примере умножителя. Объясняется это большой мощностью прибора (увеличение потенциала и тока луча позволяет повысить мощность сигнала при сохранении порядка флуктуационной мощности, как следует из формулы (15)). На рис. 7 представлено изменение γ в зависимости от уровня возбуждения клистрона. Коэффициент трансформации шума возбудителя для усилителя, так же как и для умножителя, при оптимальном возбуждении близок к единице вне зависимости от параметров прибора.

в) Каскадный клистрон в режиме синхронной настройки. Выше было отмечено, что в режиме усиления преобладает узкополосная составляющая шума. Это позволяет использовать полученные формулы для расчета комбинационных шумов в синхронно настроенном каскадном клистроне.

Пренебрегая всеми составляющими тока, наводимого в выходном резонаторе, кроме той, которая существует в результате скоростной модуляции в предшествующем зазоре, можно рассматривать выходной каскад многоконтурного клистрона как двухрезонаторный клистрон, к входному зазору которого подходит ток, флуктуирующая составляющая которого усилена по сравнению с составляющей на выходе прожектора в K_i раз, где K_i — коэффициент усиления по току ступеней, предшествующих оконечному каскаду. Следовательно, отношение мощности сигнала к спектральной плотности мощности шума в каскадном клистроне уменьшается пропорционально K_i^2:

$$\gamma_к = \frac{\gamma}{K_i^2}\,. \qquad (16)$$

* Мы ориентировались на данные, опубликованные в [3].

В качестве иллюстрации рассмотрим каскадный клистрон с теми же параметрами, что и рассмотренный выше двухрезонаторный; допустим, что при четырех резонаторах $K_i = 50$ *дб*. Этому будет соответствовать $\gamma_к = 142$ *дб*.

Естественно задаться вопросом: что нужно сделать для обеспечения максимального отношения мощности сигнала к мощности шума в рассматриваемых приборах? Рассмотрим с этой точки зрения формулу (14), интересуясь областью частот, близких к несущей, и считая возбудитель нешумящим:

$$\gamma \simeq \frac{I_0^2 J_N^2(NX)}{g_{эф}(\omega)} = \frac{2 I_0 U_0 J_N^2(NX)}{(4-\pi) kT_к \left[\left(1-\frac{X^2}{2}\right) N^2 (\Theta_1 - \Theta_0)^2 + \xi_1(NX)\left(\frac{M_1^2 \Theta_0 \Theta_1 R_1}{2 R_0}\right)^2\right]}.$$

Анализ этой формулы, справедливой при работе прожектора в режиме полного пространственного заряда, приводит к следующим выводам.

1) Мощные (а следовательно, и более высоковольтные) клистроны обеспечивают большее отношение мощности сигнала к мощности шума, чем маломощные.

2) Желательно использование низкотемпературных катодов.

3) При усилении, как было показано ранее, основную роль играют узкополосные шумы, мощность которых пропорциональна $M_1^2 \Theta_0 \Theta_1 R_1 / R_0$. При конструировании клистрона на заданную мощность и усиление величины, входящие в это выражение, оказываются довольно определенными, и поэтому трудно добиться снижения уровня шума путем их подбора, не ухудшая параметров усилителя. Более удобно такое изменение конструкции прожектора, которое обеспечит минимум конвекционного шумового тока, возбуждающего входной резонатор. Это можно сделать при помощи тех же принципов, которые используются в лампах бегущей волны и в малошумящих клистронах, предназначенных для предварительного усиления [4].

4) В случае умножения частоты с высокой кратностью, когда основную роль играют широкополосные шумы, их можно снизить и при диодной конструкции прожектора путем уменьшения разности $\Theta_1 - \Theta_0$. Если объемный заряд в области дрейфа нельзя считать достаточно слабым для прямого использования выведенной формулы, то качественная картина все же должна сохраниться; ввиду разности знаков скоростной модуляции у катода и у анода прожектора всегда можно будет найти комбинацию Θ_1 и Θ_0, обеспечивающую минимум шума.

Последовательный учет объемного заряда в рассмотренной задаче чрезвычайно сложен из-за того, что приходится рассматривать группировку широкого спектра флуктуаций в присутствии сильного сигнала и его гармоник. При этом возникает ряд проблем, не разрешенных в настоящее время и для более простых случаев.

Поскольку мы интересуемся в основном отношением мощности сигнала к мощности шума, то представляется, что учет расталкивания не должен сильно сказаться на этом результате.

В реальных клистронах могут проявляться другие виды шумов, не рассматриваемые здесь. К их числу относятся прежде всего ионные шумы, шумы токораспределения (особенно сильно сказывающиеся в лампах с сетками), шум электронов вторичной эмиссии.

Поэтому, прежде чем улучшать свойства клистрона с точки зрения шумов, происходящих из-за флуктуаций тока и скорости электронов у катода, надо убедиться в том, что сделано все, чтобы избавиться от вышеуказанных добавочных шумов. Наилучшими, с этой точки зрения, должны быть бессеточные клистроны с хорошим токопрохождением.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ф. Б. Левеллин, Инерция электронов, перев. с англ. ГТИ, 1946.
2. V. J. Norris, The frequency-multiplier klystron, J. Electronics, 1956, 1, 5, 477.
3. M. O. Bryant, C. P. Lea-Wilson, Some experiments on broad-band c-w klystron at x-band, J. Electronics and Control, 1959, 6, 6, 481.
4. F. M. H. Robinson, Microwave shot noise in electron beam and the minimum shot noise factor of TWT and klystrons, J. Brit. Instn Radio Engrs, 1954, 14, 2,79.

Поступила в редакцию
24 III 1961

1961 № 12

ЧАСТОТНЫЕ СВОЙСТВА ГЕРМАНИЕВЫХ ДИОДОВ СО СВАРНЫМ КОНТАКТОМ ПРИ ОБРАТНЫХ НАПРЯЖЕНИЯХ

С. Н. Иванов, Н. Е. Скворцова, Ю. Ф. Соколов

Экспериментально исследованы частотные свойства диодов из германия *n*- и *p*-типов со сварным контактом при обратных напряжениях. Показано, что последовательное сопротивление не зависит от частоты в диапазоне СВЧ, но не совпадает с низкочастотным значением. Сопротивление утечки сильно отличается от низкочастотного значения сопротивления запорного слоя.

ВВЕДЕНИЕ

В последнее время значительно возрос интерес к использованию свойств полупроводниковых диодов на высоких частотах при обратных напряжениях [1, 2]. В большинстве работ, посвященных этому вопросу, диод представляется в виде последовательно соединенных емкости C' и сопротивления $R_п$ (рис. 1), причем $R_п$ часто отождествляется с последовательным сопротивлением r_s [3]. Такое представление является довольно грубым приближением. Можно показать что если исходить из полной эквивалентной схемы контакта (рис. 2), где R — сопротивление, шунтирующее емкость запорного слоя *, величина которого удовлетворяет неравенству $R \gg 1/\omega C$, то

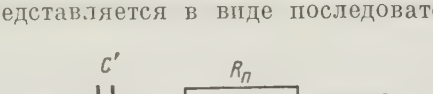


Рис. 1. Эквивалентная схема выпрямляющего контакта диода на СВЧ при отрицательных смещениях

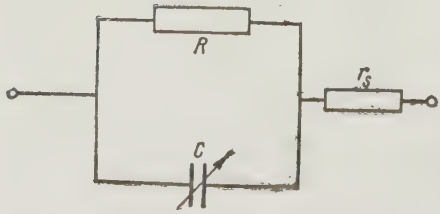


Рис. 2. Полная эквивалентная схема выпрямляющего контакта диода на СВЧ

$$R_п = r_s\left(1+\frac{1}{\omega r_s C}\cdot\frac{1}{\omega RC}\right). \quad (1)$$

При некоторых условиях, а именно если в диапазоне СВЧ $R \sim 10^3$ *ом*, второй член в скобках правой части (1) может быть сравнимым с единицей, если даже $R \gg 1/\omega C$ **. При этом согласно (1) $R_п$ должно зависеть от частоты. Экспериментальные данные по зависимости $R_п$ от частоты, хорошо согласующиеся с (1), если считать $R \sim 10^3$ *ом*, приведены в [4].

Следует сделать несколько замечаний относительно эквивалентной схемы рис. 2 и выражения (1). Если при рассмотрении величины и частотной зависимости $R_п$ исходить из (1) и считать, что R — сопротивление запорного слоя, то нужно предположить, что R резко уменьшается с ростом частоты. В самом деле на постоянном токе значение $R_0 \sim 10^6 - 10^7$ *ом*, что на 3—4 порядка отличается от R на СВЧ. В работах [4, 5] делается

---

* Поскольку, как показано ниже, вопрос о природе этого сопротивления остается открытым, будем для краткости называть его сопротивлением утечки.

** При выполнении этого неравенства $C \simeq C'$.

попытка объяснить малое значение R влиянием поверхностной утечки в диапазоне СВЧ.

Отметим также, что в известных нам работах ничего не говорится о частотной зависимости r_s и даже более того, по-видимому, до сих пор нет единой точки зрения на то, каким образом определять величину r_s в диапазоне СВЧ.

Из сказанного ясно, что систематическое исследование частотной зависимости и зависимости от обратного смещения параметров контакта r_s, R и C является актуальной задачей, так как в результате таких исследований можно установить физические причины, определяющие величину $R_п$ и приводящие к зависимости ее от частоты.

1. ОБЪЕКТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

В настоящей работе исследуются частотные свойства диодов из Ge n- и p-типов со сварным контактом (с полусферической геометрией), изготовленных по технологии, описанной в [6]. Кроме того, были исследованы диоды с омическим контактом *, изготовленные из Ge p-типа точно по той же технологии, что диоды из Ge n-типа (т. е. использовался материал с тем же удельным сопротивлением, контактные проволоки брались из той же серии, режимы сварки были одинаковыми). При этом можно считать, что геометрия омических контактов и контактов с запорным слоем одинакова, т. е. в среднем значения r_s, определенные для омических контактов и для контактов с запорным слоем, должны совпадать, если физическая природа сопротивления r_s соответствует существующим представлениям.

2. МЕТОДИКА ИЗМЕРЕНИЙ

а) Низкочастотные измерения. На низкой частоте определялось последовательное сопротивление r_{si}^0 по экстраполяции зависимости дифференциального сопротивления в прямом направлении

$$R_0(I) = r_{si}^0 + \frac{1}{\alpha I} \tag{2}$$

к $1/I \to 0$.

Такой способ определения r_{si}^0 может вызвать следующее возражение: если считать, что при прохождении тока через барьер в прямом направлении существенную роль играет инжекция неосновных носителей, то при больших прямых токах, когда уровень инжекции велик, может начаться «модуляция проводимости» толщи полупроводника. Если такой эффект существует, должно наблюдаться отклонение зависимости $R_0(1/I)$ от прямолинейной, и уравнение (2) перестает быть справедливым. Однако на опыте такого отклонения не наблюдается при изменении тока от 100 до 5000 *мка*, т. е. в наших исследованиях модуляция проводимости несущественна.

б) Высокочастотные измерения. Измерения сопротивлений контактов Z на СВЧ производились в диапазоне частот $3 \cdot 10^9$—$6 \cdot 10^{10}$ *сек*$^{-1}$. Методика измерения Z описана в [7,8]. Определение параметров контакта r_s, C и R производилось согласно эквивалентной схеме рис. 2. Поскольку в литературе не описаны способы определения r_s на СВЧ, мы остановимся на этом вопросе подробнее. Может быть предложено три метода определения r_s на СВЧ.

---

* Под термином «диод с омическим контактом» понимается конструкция, аналогичная обычному полупроводниковому диоду, в которой вместо запорного слоя создан омический контакт. Подробнее о таких диодах см. [7].

1) Определение r_s из измерений сопротивлений диодов с омическим контактом $Z_{ом}$. Существующие представления о природе последовательного сопротивления контакта приводят к выражению (для полусферических контактов)

$$r_s = \frac{\rho}{\pi d}, \tag{3}$$

где d — диаметр контакта; ρ — удельное сопротивление.

Сопротивления $r_{s\,ом}$ диодов с омическим контактом должны быть в среднем равны последовательным сопротивлениям соответствующих диодов с запорным слоем. Так как активная составляющая сопротивления омического контакта равна $r_{s\,ом}$, то последнее определяется как $\mathrm{Re}Z_{ом}$.

2) Определение r_s по экстраполяции $\mathrm{Re}Z$ к большим токам. Согласно эквивалентной схеме рис. 2

$$\mathrm{Re}\,Z = r_s + \frac{R}{1+\omega^2 C^2 R^2}. \tag{4}$$

Зависимость $R(I)$ такова, что $R \to 0$ при $I \to \infty$ [9]. Исходя из этого, можно определить r_{si}, если построить зависимость $\mathrm{Re}Z$ от $1/I$ и проэкстраполировать ее к $1/I \to 0$. Что касается вопроса о модуляции проводимости, то здесь остаются в силе соображения, изложенные в разделе а) настоящего параграфа, приведенные в связи с рассмотрением метода определения r_{si}^0.

3) Определение r_s из значения емкости C. Для исследуемых диодов имеет место следующая зависимость емкости от обратного напряжения U:

$$C(U) = \frac{\pi d^2}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon q N}{8\pi(\varphi_к + U)}}, \tag{5}$$

где ε — диэлектрическая проницаемость; q — заряд электрона; N — концентрация примесей в n-области; $\varphi_к$ — контактная разность потенциалов. Из (3) и (5) следует

$$r_s\sqrt{C} = A\rho\sqrt[4]{\frac{N}{\varphi_к + U}}, \tag{6}$$

где A — константа. При заданном ρ величины N и $\varphi_к$ определены и соотношение (6) при $U = 0$ примет вид

$$r_s\sqrt{C} = \mathrm{const}. \tag{7}$$

Отсюда по измеренному значению C можно определить r_{sc}.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ

Экспериментальные исследования частотных свойств сопротивлений контактов диодов, изготовленных из Ge n- и p-типов, показывают, что характер основных зависимостей для этих диодов одинаков. Поэтому целесообразно изложить полученные результаты для зависимостей r_s, C, R и $R_п$ от частоты и напряжения смещения одновременно для диодов обоих типов.

1) Последовательное сопротивление. Определение r_s производилось согласно методам, изложенным в § 2 (раздел б, пункты 2 и 3). Для одной серии диодов исследовались аналогичные (т. е. с теми же ρ и d) диоды с омическим контактом. Кроме того, для всех диодов определялась величина r_{si}^0.

Таблица 1

Последовательные сопротивления

ω, $сек^{-1}$	n-тип Ge $\rho = 0{,}05$ $ом \cdot см$, $C_0 \simeq 0{,}3$ $пф$			p-тип Ge $\rho = 0{,}1$ $ом \cdot см$, $C_0 \simeq 1{,}5$ $пф$	
	r_{si}	$r_{s\,ом}$	r^*_{sc}	r_{si}	r^*_{sc}
0	8,3	11	—	6,5	—
$0{,}59 \cdot 10^{10}$	—	—	11,5	11,3	10
$1{,}23 \cdot 10^{10}$	10	11,4		—	
$1{,}94 \cdot 10^{10}$	11	12		11,5	
$5{,}9 \cdot 10^{10}$	13	14		11	

Примечание: Звездочка — среднее значение из измерений на разных частотах.

Таблица 2

Сравнение последовательных сопротивлений контактов диодов, изготовленных из Ge n- и p-типов ($N = 5 \cdot 10^{16}$ $см^{-3}$, $d \sim 23$ $мк$)

	Ge p-типа	Ge n-типа
r^*_s	15	7

Примечание: Звездочка — среднее значение из измерений на разных частотах.

Экспериментальные данные приведены в табл. 1 и 2. На рис. 3 приведены типичные зависимости $\mathrm{Re}\,Z$ от $1/I$ на разных частотах для одного из диодов.

Основные результаты, как видно из таблиц, таковы:

1. Значения r_{si}, r_{sc} и $r_{s\,ом}$ не зависят в исследуемом диапазоне СВЧ от частоты и с хорошей точностью совпадают по величине.

2. Значения r^0_{si} для всех диодов меньше соответствующих величин r_{si} на СВЧ, в то время как $r_{s\,ом}$ на постоянном токе и на СВЧ хорошо совпадают.

3. Значения r_s для диодов из Ge p-типа выше, чем для диодов из Ge n-типа при одинаковых концентрациях примеси и диаметрах контакта.

2) Емкость запорного слоя и сопротивление утечки. На рис. 4 приведена типичная зависимость емкости выпрямляющего контакта от обратного напряжения на диоде. Каждая точка есть среднее значение емкости, полученной из измерений на семи частотах диапазона СВЧ ($\omega = 3 \cdot 10^9$—$6 \cdot 10^{10}$ $сек^{-1}$). Зависимость $1/C^2$ от $U_{обр}$ показана на рис. 5.

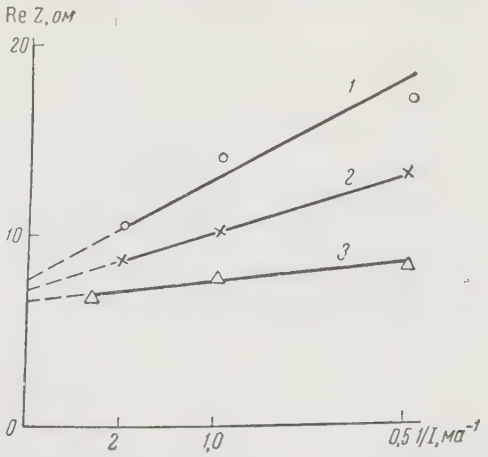


Рис. 3. Экспериментальная зависимость ReZ от $1/I$ в прямом направлении на разных частотах:
1 — $\omega = 0{,}63 \cdot 10^{10}$ $сек^{-1}$; 2 — $\omega = 0{,}82 \cdot 10^{10}$ $сек^{-1}$; 3 — $\omega = 5{,}9 \cdot 10^{10}$ $сек^{-1}$

Из приведенных результатов следует, что емкость выпрямляющего контакта не зависит от частоты и пропорциональна $(\varphi_к + U_{обр})^{-1/2}$, т. е., как и следовало ожидать, является зарядной емкостью.

Следует заранее оговориться, что определение величины R возможно только для тех диодов, у которых сопротивление потерь $R_п$ значительно превосходит r_s. В случае, когда $R_п$ и r_s близки по величине, нахождение R связано с очень большими ошибками и нами не проводилось.

На рис. 6 приведены зависимости R от обратного напряжения на разных частотах. Из кривых рис. 6 следует, что R растет с увеличением обратного напряжения, сильно отличается от низкочастотного значения сопротивления запорного слоя и в исследуемом диапазоне для диодов

из Ge n- и p-типов составляет величину $\sim 10^3$ *ом*. Полученные данные согласуются с результатами, приведенными в работах [4, 5]. Интерпретация результатов, предложенная в этих работах, на наш взгляд, недостаточно убедительна, так как для объяснения экспериментальных

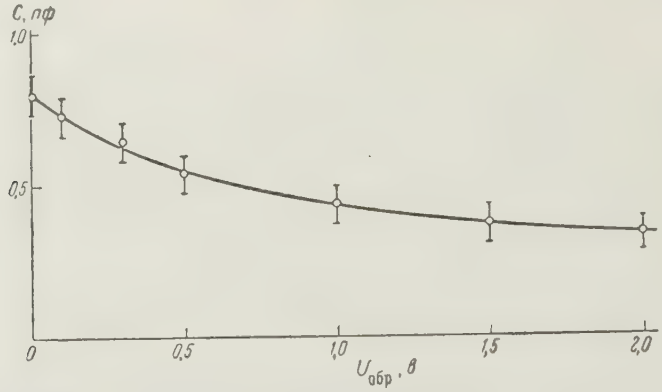


Рис. 4. Зависимость емкости контакта от обратного напряжения

данных приходится вводить ряд параметров, которые не могут быть определены из независимых наблюдений и не могут объяснить экспериментальные результаты в широком диапазоне частот. Действительно, если исходить из эквивалентной схемы рис. 3, *б* работы [4], то при достаточно низких частотах ($\omega \sim$ $\sim 10^7$—10^8), когда $R_{s1} \ll 1/\omega C_s$, емкость

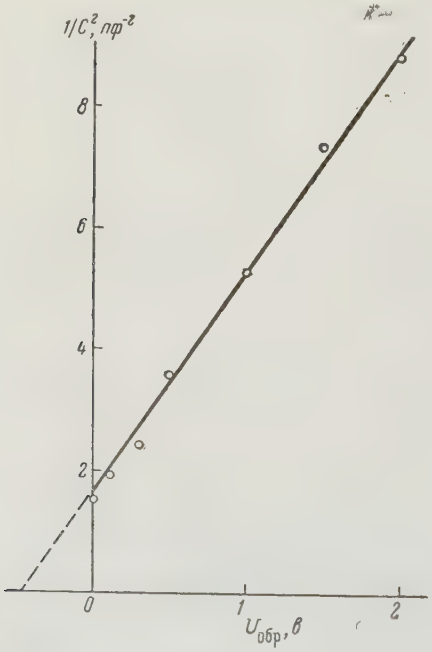


Рис. 5

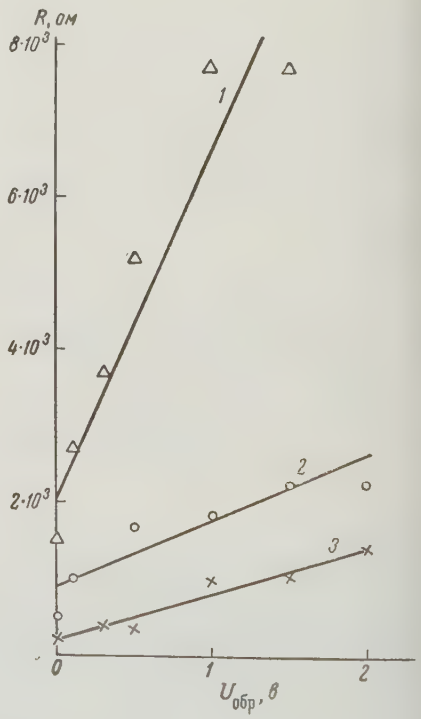


Рис. 6

Рис. 5. Зависимость $1/C^2$ от обратного напряжения

Рис. 6. Зависимость сопротивления R от обратного напряжения на разных частотах

1 — $\omega = 6{,}5 \cdot 10^9$ *сек*$^{-1}$; *2* — $\omega = 2 \cdot 10^{10}$ *сек*$^{-1}$; *3* — $\omega = 5{,}9 \cdot 10^{10}$ *сек*$^{-1}$

диода должна быть равна $C_s \gg C_t$. На опыте этого не наблюдается. По-видимому, имеющихся в настоящее время данных недостаточно для установления природы сопротивления утечки R.

3) Сопротивление потерь. На рис. 7 показаны частотные зависимости $R_п$ *. Зависимость $R_п$ от напряжения для диода с $C_0 \simeq 1$ *пф* на разных частотах представлена на рис. 8. Из рассмотрения зависимостей $R_п$ от частоты и напряжения смещения следует, что для всех диодов:

1) $R_п$ уменьшается с ростом частоты.

2) Чем меньше начальная емкость выпрямляющего контакта, тем при бо́ль-

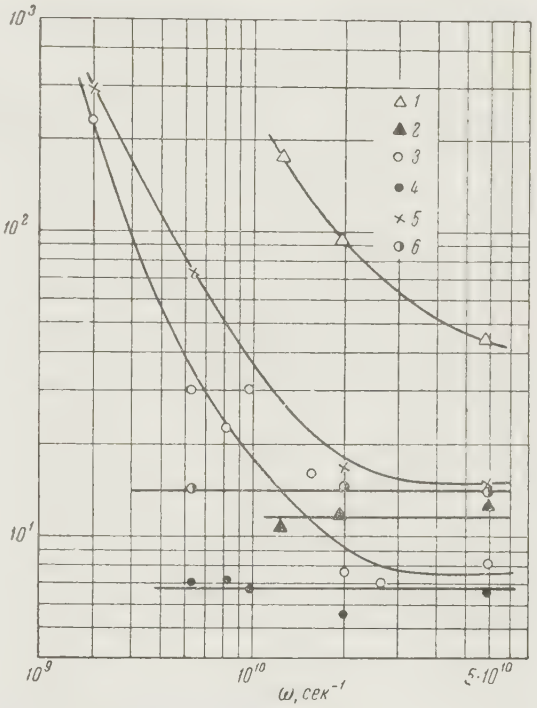


Рис. 7. Зависимость сопротивления потерь от частоты:
1 — $R_п$, 2 — r_{si} (1, 2 — диод из Ge *n*-типа, $C_0 \simeq 0{,}2$ *пф*); 3 — $R_п$, 4 — r_{si} (3, 4 — диод из Ge *n*-типа, $C_0 \simeq 0{,}8$ *пф*); 5 — $R_п$, 6 — r_{si} (5, 6 — диод из Ge *p*-типа, $C_0 \simeq 0{,}8$ *пф*)

ших частотах $R_п$ перестает зависеть от частоты. В области частот, где $R_п$ не зависит от частоты, оно с хорошей точностью совпадает с последовательным сопротивлением r_s.

3) Сопротивление потерь растет с увеличением обратного напряжения на диоде. Эта зависимость выражена сильнее для низкочастотной области исследуемого диапазона.

4) Сопротивление потерь $R_п$ имеет одинаковый характер частотной зависимости для диодов из германия с разными типами проводимостей.

4. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

1) Последовательное сопротивление. Как сказано во введении, одна из основных целей экспериментального исследования состояла в решении вопроса о зависимости r_s от частоты.

Результаты пункта 1 § 3 показывают, что, с одной стороны, r_s не зависит от частоты в диапазоне СВЧ, а, с другой стороны, отличается от r_{si}^0. Объяснить это расхождение модуляцией проводимости толщи полупроводника невозможно по двум причинам. Во-первых, как указывалось в § 2, такая модуляция несущественна в описанных экспериментах, во-вторых, если бы даже она имела место, то должна была одинаково проявляться как на постоянном токе, так и на СВЧ.

* На рис. 7 сопротивление $R_п$ соответствует $U_{обр} = 0{,}5$ *в*, так как при меньших напряжениях возможны ошибки из-за несоблюдения режима малого сигнала по СВЧ.

Рассмотрим выражение (3) для r_s:

$$r_s = \frac{\rho}{\pi d} .$$

Из него следует, что r_s может меняться при изменении либо ρ, либо d. Поскольку модуляция ρ отсутствует, следует предположить, что изменение r_s определяется изменением d. Ниже мы попытаемся качественно объяснить причину этого изменения.

По существу r_s является сопротивлением той области полупроводника, где ток определяется главным образом дрейфовой составляющей. Граница этой области в тех случаях, когда существенную долю тока через переход составляет диффузионный ток, не совпадает с технологической границей выпрямляющего контакта, а отстоит от нее на расстоянии порядка диффузионной длины L_0, которая может быть сравнима с d (см. рис. 9). В самом деле, в сферическом слое толщины

$$L_0 \sim \sqrt{D\tau},$$

где τ — время жизни неосновных носителей; D — коэффициент диффузии,

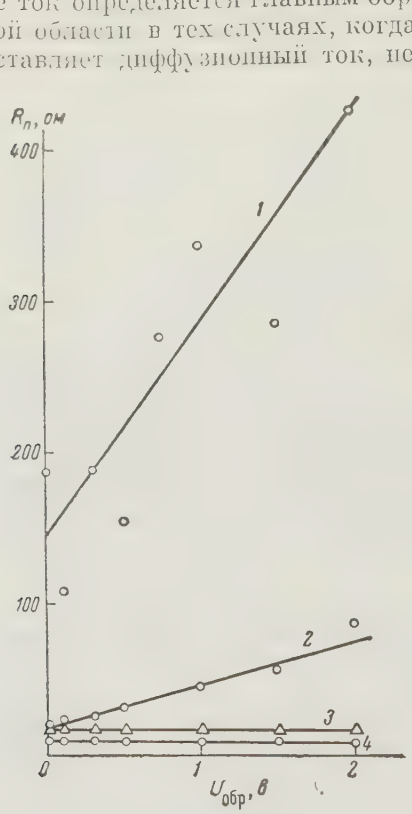


Рис. 8

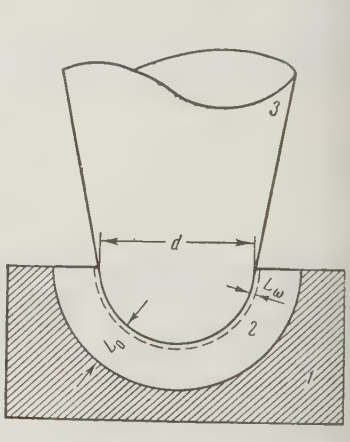


Рис. 9

Рис. 8. Зависимость сопротивления потерь от обратного напряжения на диоде (Ge n-типа, $C_0 \simeq 1$ $n\phi$):

1 — $\omega = 3 \cdot 10^9$ *сек*$^{-1}$; *2* — $\omega \simeq 10^{10}$ *сек*$^{-1}$; *3* — $\omega = 1{,}55 \cdot 10^{10}$ *сек*$^{-1}$; *4* — $\omega = 5{,}9 \cdot 10^{10}$ *сек*$^{-1}$

Рис. 9. Выпрямляющий контакт:

1 — толща полупроводника; *2* — область полупроводника, не вносящая вклад в последовательное сопротивление на постоянном токе; *3* — контактная проволока

ток в основном является диффузионным, т. е. эта область не вносит вклад в последовательное сопротивление. Выражение для r_s, таким образом, должно иметь вид

$$r_s = \frac{\rho}{\pi (d + 2L_0)} . \qquad (8)$$

Иная картина должна наблюдаться на СВЧ. Диффузионная составляющая тока СВЧ ограничивается областью вблизи технологической границы перехода толщины $L_\omega \sim \sqrt{D/\omega}$ [10]. Оценка показывает, что в исследованном диапазоне $L_\omega \ll d$ и, таким образом, r_s определяется формулой (3) (где d — диаметр контакта) и не зависит от ω.

Итак, отношение r_{si}, измеренное на СВЧ, и r_{si}^0, согласно (3) и (8), должно быть равно

$$\frac{r_{si}}{r_{si}^0} = 1 + \frac{2L_0}{d}. \qquad (9)$$

Оценка величины L_0 и, следовательно, τ согласно (9) приводит к значениям $\tau \sim 10^{-7}$—10^{-8} *сек*. Поскольку r_{sc} и $r_{s\,ом}$ определяются тем же уравнением (3), то совпадение экспериментальных значений r_{si}, r_{sc} и $r_{s\,ом}$ и отсутствие их зависимости от ω вполне закономерны *.

Сравнение r_s для образцов из Ge, *n*- и *p*-типов с одинаковой концентрацией примесей и одинаковыми диаметрами контактов, как и следовало ожидать, показало, что r_s меньше для диодов из Ge *n*-типа, так как подвижность основных носителей в Ge *n*-типа больше, чем в Ge *p*-типа.

2) Сопротивление потерь. Рассмотрим теперь, чем определяется частотная зависимость $R_п$ — зависимостью от частоты r_s, зависимостью R и C или зависимостью всех этих величин одновременно.

Зависимость $R_п$ от частоты и отличие $R_п$ от r_{si}^0 определяются как неравенством высокочастотных и низкочастотных значений r_s, так и частотной зависимостью R (сильным уменьшением R на СВЧ по сравнению с низкочастотным значением R_0).

Поскольку величина R получается одного порядка для всех диодов ($R \sim 10^3$ *ом*), второй член в скобках в правой части выражения (1) должен давать вклад в $R_п$ до больших частот в случае малых C по сравнению со случаем больших C. Это наблюдается на опыте.

Авторы выражают благодарность С. Г. Калашникову за полезную дискуссию и критические замечания по работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Uhlir, Proc. I. R. E., 1958, **46**, 6, 1099.
2. M. Uenohara, Proc. I. R. E., 1960, **48**, 2, 169.
3. В. С. Эткин, Радиоэлектронная промышленность, 1959, 9, 3.
4. S. T. Eng, R. Solomon, Proc. I. R. E., 1960, **48**, 3, 358.
5. D. E. Sawyer, J. Appl. Phys., 1959, **30**, 3, 1669.
6. С. Н. Иванов, Н. Е. Скворцова, Ю. Ф. Соколов, Радиотехника и электроника, 1959, 4, 9, 1538.
7. Ю. Ф. Соколов, Радиотехника и электроника, 1961, **6**, 3, 399.
8. Ф. С. Русин, Н. Е. Скворцова, Ю. Ф. Соколов, Сб. Полупроводниковые приборы и их применение, 1958, 3, 13.
9. Н. А. Пенин, Н. Е. Скворцова, Радиотехника и электроника, 1958, **3**, 2, 267.
10. W. Shockley, Bell System Techn. J., 1949, **28**, 3, 435.

Поступила в редакцию
14 II 1961

---

* Для подтверждения справедливости предложенной интерпретации интересно исследовать частотную зависимость r_s в области частот $\omega \sim 1/\tau$.

1961 № 12

ЕМКОСТЬ И ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ ГЕРМАНИЕВЫХ ДИОДОВ

В. С. Багаев, А. А. Жеребцова, В. А. Павленко

Приведены результаты измерений емкости и последовательного сопротивления германиевых диодов, изготовленных методами вплавления и диффузии. Емкости диодов были измерены на трех частотах: 130 *кгц*, 40, 1830 *Мгц* в зависимости от напряжения смещения и в пределах точности измерений не зависят от частоты. Последовательное сопротивление диодов не зависит от напряжения смещения и имеет у вплавленных $p^+ - n$-диодов, протравленных в перекиси водорода, и диффузионных $n^+ - p$-диодов, протравленных в СР-4, одно и то же значение на частотах 40 и 1830 *Мгц*, тогда как у диффузионных диодов, протравленных в перекиси водорода, на меньшей частоте значения последовательного сопротивления в 2—5 раз больше.

ВВЕДЕНИЕ

Диод можно представить в виде эквивалентной схемы (представленной на рис. 1), где r_s — последовательное сопротивление (базы) диода, C и R — емкость и дифференциальное сопротивление $p-n$-перехода,

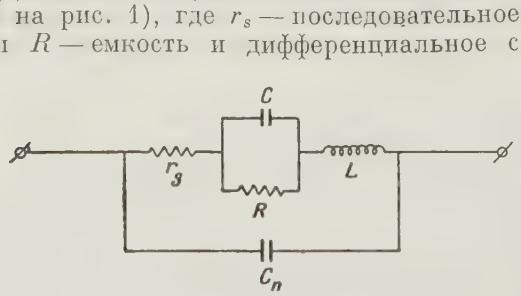


Рис. 1

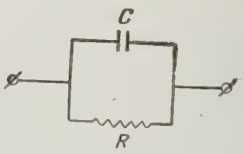


Рис. 2

Рис. 1. Эквивалентная схема параметрического диода

Рис. 2. Эквивалентная схема диода для низких частот

L — индуктивность контактной пружинки, $C_п$ — емкость патрона (между ниппелями). Данная схема пригодна до очень высоких частот, пока линейные размеры диода малы по сравнению с длиной волны. В области низких частот (100 *кгц*) схема несколько упрощается, т. е. диод можно представить эквивалентной цепочкой, изображенной на рис. 2.

Для определения параметров схемы проводились измерения на частотах 130 *кгц*, 40 и 1830 *Мгц*. Измерение на наибольшей частоте позволяет определить r_s, C, L и $C_п$. Величины r_s и C были измерены в зависимости от обратного смещения, предполагая, что $R \gg 1/\omega C$. При этом использовался метод, основанный на измерении коэффициента стоячей волны напряжения и сдвига минимума в линии, в конце которой включена комплексная нагрузка. По измеренным величинам вычислялась $Y_{вх}$ — входная проводимость диода, а также $Y_{хх} = j\omega C_п$ — входная проводимость в режиме холостого хода и $Y_{кз} = j\omega C_п + \frac{1}{j\omega L}$ — входная проводимость, измеренная в режиме короткого замыкания.

Величины r_s и C определялись из соотношения

$$r_s - j\frac{1}{\omega C} = \frac{1}{Y_{вх} - Y_{хх}} - \frac{1}{Y_{нз} - Y_{хх}}.$$

Точность определения r_s и C составляла $\pm 10\%$.

Блок-схема установки показана на рис. 3. Частоту модуляции задавал *1* — звуковой генератор (ЗГ-10), который синхронизировал работу *2* — генератора прямоугольных импульсов (ГИИ-1). С этого генератора импульсы подавались на *3* — вход модуляции генератора ГСС-15 и в качестве опорного напряжения — на *8* — синхронный детектор. ГСС-15

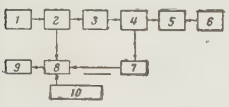


Рис. 3. Блок-схема установки для измерения полного входного сопротивления диода:

1 — звуковой генератор; *2* — импульсный генератор; *3* — генератор колебаний СВЧ; *4* — измерительная линия; *5* — держатель с диодом; *6* — схема подачи напряжения смещения на диод; *7* — усилитель; *8* — синхронный детектор; *9* — индикаторный прибор; *10* — стабилизированный выпрямитель

питал *4* — измерительную линию, в конец которой включен *5* — исследуемый диод. Продетектированный сигнал с зонда измерительной линии поступал на *7* — усилитель 28ИМ, откуда подводился к *8* — синхронному детектору. Выигрыш в чувствительности получался за счет сужения шумовой полосы до 1 *гц*. Необходимость в повышенной чувствительности вызывается большими величинами измеряемых коэффициентов стоячей волны напряжения.

На частоте 130 *кгц* определялись C и R также в зависимости от обратного напряжения. Измерение проводилось на мосте типа 2Т с точностью измерения емкости 0,2 *пф*. Измерения на частоте 40 *Мгц*, которые проводились на Q-метре с повышенной чувствительностью, дали некоторое представление о частотных свойствах параметров диода r_s, C.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Изучение статических характеристик диодов проводилось в зависимости от свойств исходного материала, технологии изготовления и геометрических размеров диодов. На рис. 4 и 5 показаны зависимости емкости от приложенного обратного напряжения в двойном логарифмическом масштабе для вплавленного и диффузионного диодов на частотах

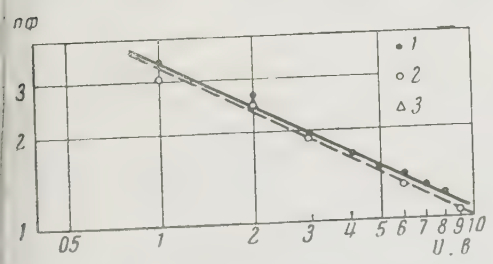


Рис. 4. Зависимость емкости от обратного напряжения для вплавленного диода (диод № 58, $n = 2{,}05$):

1 — измерения на частоте 130 *кгц*; *2* — измерения на частоте 1830 *Мгц*; *3* — измерения на частоте 40 *Мгц*

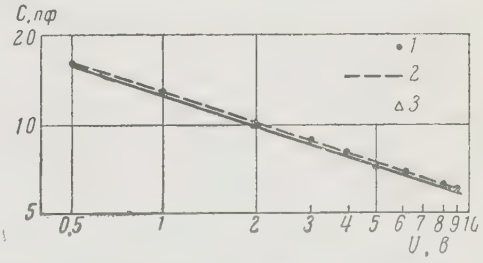


Рис. 5. Зависимость емкости от обратного напряжения для диффузионного диода (диод № 61а, $n = 3{,}15$):

1 — измерения на частоте 130 *кгц*; *2* — измерения на частоте 1830 *Мгц*; *3* — измерения на частоте 40 *Мгц*

130 *кгц* и 1830 *Мгц*. Здесь же нанесены значения емкости при подаче смещения — 2 *в* на частоте 40 *Мгц*. Как видно из рис. 4 и 5, значения емкости на указанных частотах для всех исследованных диодов в пределах точности измерений совпадают.

Используя участки кривых в области напряжений, когда $U > \varphi^*$, (U — внешнее напряжение и φ^* — дополнительная разность потенциалов [1]), можно определить величину показателя степени для $C = \alpha U^{-\frac{1}{n}}$. Затем из графика $C^{-n} = \beta' U$ можно найти величину φ^*, как это видно из рис. 6.

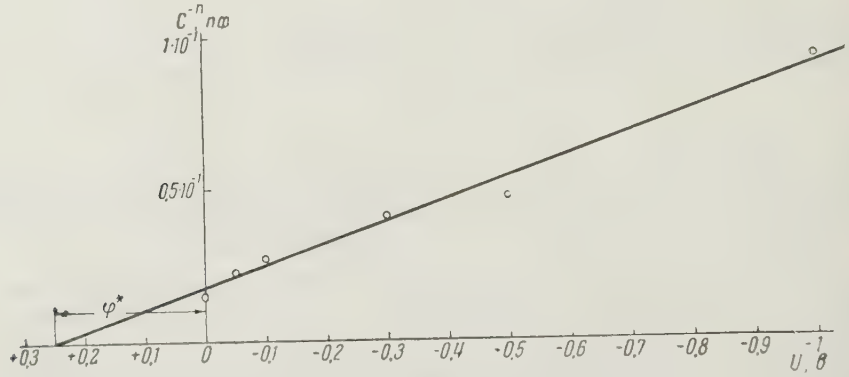


Рис. 6 Зависимость обратной величины емкости в степени n от обратного напряжения. Диод № 56, $n = 2{,}2$.

Значения φ^*, полученные из эксперимента и рассчитанные по формуле [1]

$$\varphi^* = U_к - U_i = \frac{kT}{q} \ln \frac{\beta N_d^2}{n_i^2}$$

с учетом объемного инверсионного слоя при $\beta = 1$, соответственно равны для вплавленных диодов (при $N_d = 2 \cdot 10^{16}$ *см*$^{-3}$,) 0,23 и 0,34 *в*, а при $N_d = 3{,}5 \cdot 10^6$ *см*$^{-3}$ — 0,28 и 0,37 *в*. В приведенной формуле $U_к$ — контактная разность потенциалов, U_i — падение напряжения на инверсионном слое, k — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура, q — заряд электрона, N_d — избыточная концентрация понизованной примеси, n_i — собственная концентрация носителей, β — множитель, указывающий соотношение между концентрациями подвижных носителей в инверсионном слое и объеме. Для диффузионных диодов приведенная формула неприменима.

Таблица 1

№ диодов	U, *в*	ρ, *ом·см*	S, *см*^{2}	l, *мк*	r_s, *ом* расчет	r_s, *ом* 1830 *Мгц*	r_s, *ом* 40 *Мгц*	C, *пф* (при смещении —2 *в*)	Примечание
46	19	0,15	$3{,}6 \cdot 10^{-5}$	40	17	20	—	1,3	Вплавленные диоды, протравленные в перекиси водорода
49	19	0,15	$3{,}4 \cdot 10^{-5}$	40	18	13	—	0,6	
56	16	0,12	$8{,}2 \cdot 10^{-5}$	50	7	6,0	—	2,1	
57	17	0,12	$9{,}0 \cdot 10^{-5}$	50	7	6,5	4	2,5	
58	17,5	0,12	$7{,}3 \cdot 10^{-5}$	50	8	7,0	—	2,0	
59	17	0,12	$5{,}2 \cdot 10^{-5}$	50	6	7,5	6	2,3	
69	17	0,12	$4{,}7 \cdot 10^{-5}$	50	13	13,0	18	1,5	
62	11	0,07	$3{,}0 \cdot 10^{-5}$	35	8	7,0	9	1,0	
64	12	0,07	$3{,}2 \cdot 10^{-5}$	35	8	8,0	—	1,3	

Полученные различными методами значения последовательного сопротивления r_s сведены в табл. 1 и 2, в которых указаны номера диодов, пробивные напряжения (*в*), удельное сопротивление исходного

материала (*ом·см*), площадь $p-n$-перехода ($см^2$), толщина базы (*мк*), последовательное сопротивление (*ом*), рассчитанное по формуле $r_s = \rho \frac{l}{S}$ (где l — толщина базы, S — площадь $p-n$-перехода) и измеренное на

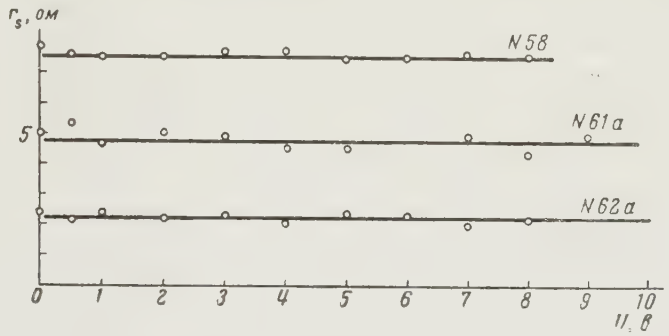


Рис. 7. Зависимость последовательного сопротивления r_s диода от обратного напряжения

частотах 1830 и 40 *Мгц*, и емкость $p-n$-перехода при смещении — 2 *в*. Формула для определения r_s при использованной технологии изготовления $p-n$-переходов справедлива в рамках точности измерений r_s как для вплавленных, так и для диффузионных диодов. Толщина базы l при $d > l$, где d — диаметр $p-n$-перехода, оценивалась из сечения образца, перпендикулярного площади $p-n$-перехода для вплавленных диодов визуально под микроскопом, а для диффузионных диодов — методом термозонда.

Последовательное сопротивление r_s, измеренное на частоте 1830 *Мгц*, при обратных напряжениях от 0 до 10 *в* остается постоянным (рис. 7). Это можно объяснить тем, что расширение $p-n$-перехода незначительно по сравнению с толщиной базы. Как видно из табл. 1 и 2, получается удовлетворительное совпадение измеренных и рассчитанных значений r_s для вплавленных диодов; для диффузионных диодов имеется как совпадение рассчитанных значений r_s с измеренными, так и несовпадение, причем значения r_s на 40 *Мгц* в случае несовпадения в 2—5 раз больше, чем измеренные на 1830 *Мгц* для тех же диодов. Частотная зависимость r_s наблюдалась в работах [2]. Так как нами было приня-

Таблица 2

№ диодов	U, *в*	ρ, *ом·см*	S, $см^2$	l, *мк*	r_s, *ом* расчет	r_s, *ом* 1830 *Мгц*	r_s, *ом* 40 *Мгц*	C, *пф* (при смещении —2 *в*)	Примечание
19а	43	0,17	$6{,}7\cdot10^{-5}$	25	6	7,5	40	1,2	Диффузионные диоды, протравленные в СР-4 (19а—70а) и перекиси водорода (13—20)
45а	43	0,17	$2{,}1\cdot10^{-4}$	30	2	7,0	14	2,7	
61а	12,5	0,013	$1{,}6\cdot10^{-4}$	150	—	4,8	14	5,8	
62а	12,5	0,013	$3{,}0\cdot10^{-4}$	150	0,65	2,2	9	10,0	
70а	12,5	0,013	$7{,}2\cdot10^{-5}$	25	0,3	3,7	6	2,2	
13	19	0,02	$5{,}3\cdot10^{-5}$	70	3	4,6	4	2,0	
14	19	0,02	$9{,}3\cdot10^{-5}$	70	2	2,5	3	3,7	
15	19	0,02	$2{,}3\cdot10^{-5}$	70	—	5,3	6	1,0	
20	19	0,02	$5{,}5\cdot10^{-5}$	150	—	6,5	5	2,0	

то, что r_s — сопротивление материала базы, то оно не зависит от частоты. Следовательно, в случае несовпадения различных r_s необходимо говорить, что измеряется некое эквивалентное сопротивление $r_{s\,экв}$.

Замену r_s на $r_{s\,экв}$ для некоторых диодов можно объяснить следующим образом, используя экспериментальные результаты. На вплавленных диодах с $p^+ - n$-переходом, протравленных в перекиси водорода, и на диффузионных $n^+ - p$-диодах, протравленных в СР-4, частотной зависимости r_s не наблюдалось (см. табл. 1 и 2). При травлении в перекиси водорода на германии всегда образуется поверхность n-типа, тогда как при травлении в СР-4 образуется поверхность p-типа [3]. Следовательно, можно предположить, что на диффузионных $n^+ - p$-диодах при травлении в перекиси водорода на p-стороне образуется поверхностный инверсионный слой, что позволяет объяснить частотную зависимость $r_{s\,экв}$ [2]. В случае вплавленных $p^+ - n$-диодов, протравленных в перекиси водорода, и диффузионных $n^+ - p$-диодов, протравленных в СР-4, поверхностных инверсионных слоев на высокоомной стороне перехода, по-видимому, не образуется.

Авторы выражают благодарность Б. М. Вулу за руководство работой и обсуждение результатов. За обсуждение результатов авторы выражают благодарность Н. Е. Скворцовой, Ю. Ф. Соколову, С. Н. Иванову. За изготовление образцов авторы выражают благодарность Ю. Н. Королеву, Л. М. Новак и Г. П. Прошко.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. М. Вул, Э. И. Заварицкая, ЖЭТФ, 1960, 38, 1, 10.
2. S. T. Eng, R. Solomon, Proc. I. R. E., 1960, 48, 3, 358; D. E. Sawyer, T. Appl. Phys., 1959, 30, 11, 1689.
3. А. В. Ржанов, И. Г. Неизвестный, В. В. Росляков, ЖТФ, 1956, 26, 10, 2142.

Физический институт
им. П. Н. Лебедева
АН СССР

Поступила в редакцию
28 XII 1960

О ВОЛЬТАМПЕРНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКЕ ТУННЕЛЬНОГО ДИОДА

В. Л. Бонч-Бруевич, П. С. Серебренников

С учетом неоднородности поля в переходе в предположении полного вырождения ($T=0$) получены выражения для вольтамперной характеристики туннельного диода как для прямых переходов, так и для переходов с рассеянием на фононах и примеси.

ВВЕДЕНИЕ

Исследованию вольтамперной характеристики туннельного диода посвящено уже несколько работ (см., например, [1, 2, 3]). Тем не менее, полне удовлетворительного решения проблемы, на наш взгляд, еще не было дано. В работе [1] рассмотрен нарочито упрощенный («карикатурный») вариант расчета, в котором не принималась во внимание зависимость вероятности перехода от положения электрона в зоне. Это не помешало определить точку минимума тока, но выражение для максимума, как будет видно из дальнейшего, оказалось неправильным. В работе [2] вычислена вольтамперная характеристика для случая однородного поля, что, как мы увидим, не соответствует природе рассматриваемой системы. В работе [3] вероятность перехода в неоднородном поле вычислена при помощи квазиклассического метода. Такой подход, по-видимому, нуждается в обосновании, даже если метод сам по себе применим; в туннельном диоде, однако, условия применимости квазиклассического метода не выполняются; поле сильно меняется на типичной длине волны.

В настоящей работе делается попытка вычислить вольтамперную характеристику туннельного диода по возможности без использования гипотез, не допускающих непосредственной проверки на опыте. Заметим, что поставленная задача встречается с некоторыми осложнениями принципиального характера, специфическими именно для данной — существенно квантовомеханической — системы и отличающими туннельный диод от обычного диода с $p-n$-переходом.

Во-первых, ширина $p-n$-перехода в туннельном диоде ($\sim 10^{-6}$ *см*) равнима со средней длиной волны электронов. Следовательно, распределение поля и заряда здесь нельзя рассчитывать обычным классическим путем. Некоторые привычные представления (например, представление о полностью истощенном слое) могут при этом потерять непосредственный смысл.

Во-вторых, электрическое поле в переходе резко неоднородно; на протяжении длины перехода напряженность поля возрастает от нуля до $\sim 10^6$ *в/см* и опять падает до нуля. Это обстоятельство существенно, ибо вероятность туннельного просачивания сильно зависит от напряженности поля, в результате чего различные области перехода дают резко различный вклад в ток. Именно по этой причине нам представляется недостаточно убедительным расчет, выполненный в работе [2]. Попытка учета неоднородности при помощи введения некоего множителя в экспоненту ничего не решает, пока не указан однозначный путь определения этого множителя. Если не рассматривать последний просто как «подгоночную» константу, задача опять сводится к рассмотрению эффекта в неоднородном поле.

В-третьих, именно в туннельном диоде существенную роль могут играть отклонения реальной структуры перехода от идеальной, обычно рассматриваемой в теории. Действительно, в силу резкой зависимости вероятности туннельного просачивания от напряженности поля локальные изменения последней (связанные, например, с дислокациями, флуктуациями в распределении примеси и т. д.) могут давать заметный вклад в ток.

В-четвертых, в туннельном диоде мы неизбежно имеем дело с сильно легированными полупроводниками. Энергетический спектр последних, по-видимому, более сложен, чем при малой концентрации примеси [1, 4, 5, 6, 7]. Действительно, примесные зоны, существующие при концентрации примеси $\sim 10^{15} - 10^{17}$ $см^{-3}$ *, при дальнейшем повышении концентрации (в области $\sim 0{,}5 \cdot 10^{18}$ $см^3$) перекрываются с «собственными»; при этом возникает спектр сложной структуры, состоящий, вообще говоря, из нескольких ветвей. Кроме того, благодаря рассеянию носителей тока примесными атомами, состояния с заданными квазиимпульсами приобретают конечное время жизни. Это приводит к эффективному размытию краев зон и, следовательно, говорить о границах спектра в буквальном смысле слова вообще не представляется возможным. Правильнее, по-видимому, считать, что в сильно легированном полупроводнике так называемая «запрещенная» зона тоже содержит разрешенные участки энергии и разные точки ее характеризуются лишь различной плотностью состояний, асимптотически убывающей по мере приближения к центру зоны**. Иначе говоря, представление о границах «дозволенных» зон здесь можно ввести лишь в несколько условном смысле, понимая под этим значения энергии, за пределами которых плотность состояний становится достаточно малой. Именно в этом смысле данное представление использовалось в [1] и используется ниже.

В связи со сказанным весьма усложняется задача о вычислении уровня Ферми как теоретически, так и по данным Холла. В настоящей работе мы будем рассматривать уровень Ферми просто как феноменологически заданный параметр, подлежащий определению непосредственно из опыта. Очень сложным становится также расчет вероятности туннельного просачивания из примесных участков спектра. Существующая теория туннельного эффекта в буквальной своей форме здесь неприменима даже в случае однородного поля. В дальнейшем мы будем рассматривать только переходы между собственными зонами; тем самым результаты, формально полученные для любых значений внешнего напряжения Ф, фактически будут справедливы только в области, не слишком близкой к точке минимума туннельного тока, $\Phi_{мин}$ (примерно в области $\Phi_{мин} - \Phi \gtrsim \gtrsim 0{,}1 - 0{,}3$ $в$).

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Формально вполне строгое решение задачи должно было бы включать и вычисление вероятности туннельного перехода в неоднородном поле. Такой подход, однако, представляется нам мало оправданным, ибо исключительная сложность связанных с ним вычислений неизбежно привела бы к ряду аппроксимаций, и точность решения оказалась бы иллюзорной. Это тем более справедливо, если учесть неизбежную неидеальность объекта (см. Введение). Поэтому мы воспользуемся приближенным приемом, справедливым, коль скоро длина перехода l заметно превышает атомные размеры (в типичном диоде это неравенство выполняется с запасом в два порядка.) В названных условиях можно разбить p — n-переход на участки столь малые, чтобы поле внутри каждого из них было

* Цифры здесь и в дальнейшем соответствуют германию.

** Эти участки спектра можно несколько условно называть «примесными».

практически однородно, и, в то же время, столь большие, чтобы линейные размеры их заметно превосходили постоянную решетки. Тогда к каждому участку будет применима обычная теория туннельного эффекта, и результирующий ток получится интегрированием по всему переходу.

Для выполнения этой программы надо задать явный вид напряженности поля E как функции координаты x (ось Ox направлена перпендикулярно переходу). В настоящее время наиболее целесообразным представляется феноменологический путь. Положим

$$E = \begin{cases} E_m \left\{1 - \left(\frac{x}{l_1}\right)^{\gamma}\right\}, & 0 \leqslant x \leqslant l_1, \\ E_m \left\{1 - \left(\frac{x}{-l_2}\right)^{\gamma}\right\}, & -l_2 \leqslant x \leqslant 0, \end{cases} \tag{1}$$

где E_m, γ, l_1, l_2 — параметры; $\gamma \geqslant 0$. Очевидно, длина перехода есть $l = l_1 + l_2$. При малом внешнем напряжении эта длина связана с зарядной емкостью перехода C соотношением

$$C = \frac{\varepsilon S}{4\pi l}, \tag{2}$$

где ε — диэлектрическая проницаемость вещества; S — площадь перехода. Величины l и, следовательно, C зависят от внешнего напряжения Φ ($\Phi > 0$ в прямом направлении). Пользуясь равенствами (1), а также условием непрерывности потенциала в точке $x = 0$, легко получить равенство

$$lE_m = \frac{\gamma + 1}{\gamma}(U_к - \Phi),$$

где $U_к$ — контактная разность потенциалов между n- и p-образцами.

Допустим теперь, что емкость перехода меняется при изменении Φ только за счет изменения длины перехода. Для обычных переходов с исчезающим слоем это безусловно справедливо. Можно думать, что в нашем случае это предположение дает разумную аппроксимацию при достаточно малых значениях $\Phi/U_к$. Тогда формула (2) становится справедливой не только при $\Phi \to 0$, а для l и E_m мы получаем, пользуясь уравнением Пуассона * (ср. [8]),

$$l = l_0 \left(1 - \frac{\Phi}{U_к}\right)^{\frac{1}{\gamma+1}}, \tag{3}$$

$$E_m = \frac{\gamma + 1}{\gamma} \frac{U_к - \Phi}{l} = E_{m,0} \left(1 - \frac{\Phi}{U_к}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma+1}}. \tag{4}$$

Здесь l_0 и $E_{m,0}$ — длина перехода и максимальное поле в переходе при $\Phi = 0$. Заметим также, что

$$qU_к = \Delta E + \Delta_n + \Delta_p, \tag{5}$$

где q — заряд электрона; ΔE — ширина запрещенной зоны; прочие обозначения ясны из рисунка.

Из формул (2) — (4) явствует, что параметры γ и $E_{m,0}$ (единственно существенные для дальнейшего) можно оценить, измеряя зарядную емкость перехода как функцию напряжения.

Туннельный ток, связанный с отдельным участком, в пределах которого поле однородно, вычисляется по стандартным формулам. Как из-

* Использование уравнения Пуассона не означает пренебрежения квантовыми эффектами. Как известно, уравнение Пуассона справедливо и для квантовой системы взаимодействующих частиц: оно определяет средний потенциал электростатического поля, и в правой части его должна стоять средняя плотность объемного заряда. Именно для феноменологического вычисления последней из формул (1) мы и используем уравнение Пуассона.

вестно, здесь следует различать три основных случая: прямые переходы, непрямые переходы с участием фононов и непрямые переходы с рассеянием на примеси *. Вероятности первого и второго процессов вычислены в работах [9 — 11], переходы с рассеянием на примеси были недавно рассмотрены одним из авторов [12].

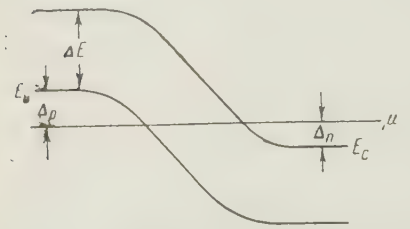


Схема туннельного p — n-перехода (напряжение на переходе равно нулю): μ — уровень Ферми; E_c — дно зоны проводимости в n-области; E_v — верх валентной зоны в p-области

В выражения для плотности туннельного тока входят функции распределения для электронов проводимости и дырок соответственно в n- и p-областях. Мы ограничимся в данной статье случаем полного вырождения, т. е. будем считать $kT \ll \Delta_n$, $kT \ll \Delta_p$.

2. ПРЯМЫЕ ПЕРЕХОДЫ

Переходы этого типа (а равно переходы с рассеянием на примеси), по-видимому, играют существенную роль в германиевых диодах [13]. Как показано в работе [9], в анизотропном случае в вероятность перехода входит величина размерности массы, определяющаяся поведением функции $E_c(p) - E_v(p)$ вблизи точки ветвления в комплексной плоскости ($E_c(p)$, $E_v(p)$ — энергия электрона в зоне проводимости и в валентной зоне соответственно). Это обстоятельство вносит в ответ известную неопределенность, которую в настоящее время трудно избежать. Поэтому мы будем вести расчет в изотропной аппроксимации, характеризуя электрон и дырку скалярными эффективными массами m_n и m_p. Следует лишь иметь в виду, что в качестве «ширины запрещенной зоны» ε_0 при этом надо брать нижнюю границу собственного поглощения света в данном кристалле (она, вообще говоря, превышает «тепловую» ширину запрещенной зоны; в германии, однако, эта разница невелика, что и делает прямые переходы практически возможными). Для численных оценок будут использоваться значения, характерные для германия: $m_n = 0{,}22m_0$, $m_p = 0{,}045m_0$ (легкие дырки), $\varepsilon_0 = 0{,}80$ эв.

Обозначим через d — постоянную решетки, а через $p_\perp$ — двумерный вектор, образованный составляющими квазиимпульса, перпендикулярными к направлению электрического поля. Введем, далее, приведенную массу $m_r = m_n m_p/(m_n + m_p)$ и положим

$$E(p_\perp) = \frac{\pi \varepsilon_0^{1/2} (m_r \varepsilon_0 + p_\perp^2)}{2q\hbar m_r^{1/2}}. \tag{6}$$

Величина $E(p_\perp)$, очевидно, имеет размерность напряженности электрического поля. Тогда согласно [11] вероятность туннельного перехода в однородном поле E, отнесенная к единице времени, есть

$$d\omega = \frac{2\pi}{\hbar} \frac{qEd}{36} e^{-\frac{E(p_\perp)}{E}} \delta(p'_\perp - p_\perp)\, \delta(W' - W)\, d^2p'_\perp\, dW', \tag{7}$$

* Конечно, возможны и непрямые переходы с участием квазичастиц любого другого типа — плазменных квантов, других электронов проводимости или дырок, экситонов. Они заслуживают особого исследования, но все же, по-видимому, менее вероятны, чем указанные выше.

где W — энергия электрона, величины со значком штрих и без него относятся к состояниям до и после туннельного перехода, $d^2p'_\perp$ означает двумерный элемент объема в пространстве $p'_\perp$. Для вычисления общего потока электронов следует заметить, что число состояний в интервале энергии dW при заданном значении $p_\perp$ есть dW/qEd. Принимая это во внимание, видим, что потоки электронов из зоны проводимости в валентную зону и обратно будут

$$i_{c\to v} = 2\int d\omega f_n(W)\,[1 - f_p(W)]\,\frac{d^2p_\perp dW}{(2\pi\hbar)^2\,qEd}, \tag{8а}$$

$$i_{v\to c} = 2\int d\omega f_p(W)\,[1 - f_n(W)]\,\frac{d^2p_\perp dW}{(2\pi\hbar)^2\,qEd}. \tag{8б}$$

Следовательно, для результирующего потока $i = i_{c\to v} - i_{v\to c}$ мы получим

$$i = \frac{1}{36\pi\hbar^3}\int \exp\left\{-\frac{E(p_\perp)}{E}\right\}\{f_n(W) - f_p(W)\}\times$$
$$\times\,\delta(p'_\perp - p_\perp)\,\delta(W' - W)\,d^2p'_\perp d^2p_\perp dW'\,dW \equiv i(x). \tag{9}$$

Как указывалось выше, это выражение следует рассматривать как поток, связанный с малым участком dx, на протяжении которого поле $E(x)$ можно считать однородным. Полный поток получится интегрированием по всему переходу:

$$i = \int \frac{dx}{l}\,i(x). \tag{10}$$

При вычислении интеграла мы будем считать функции $f_n(W)$ и $f_p(W)$ не зависящими от x. Действительно, длина перехода в рассматриваемом случае меньше длины свободного пробега; поэтому можно считать, что столкновения в области перехода практически отсутствуют.

Подставляя (9) в (10) и пользуясь для $E(x)$ формулами (1), придем к интегралам вида

$$I \equiv \int_0^{l_1} \exp\left\{-\frac{E(p_\perp)}{E_m\left[1 - \left(\frac{x}{l_1}\right)^\gamma\right]}\right\} dx. \tag{11}$$

Обозначим временно

$$\frac{E(p_\perp)}{E_m} = a$$

и произведем замену переменных:

$$\frac{a}{1 - \left(\frac{x}{l_1}\right)^\gamma} - a = t.$$

Получим

$$I = \frac{l_1 a}{\gamma}\,e^{-a}\int_0^\infty \frac{t^{\frac{1}{\gamma}-1}e^{-t}}{(a+t)^{\frac{1}{\gamma}+1}}\,dt.$$

Заметим теперь, что

$$a = \frac{E(p_\perp)}{E_m} \geqslant \frac{\pi\varepsilon_0^{3/2}m_r^{1/2}}{2q\hbar E_m} = \frac{\pi e_0^{3/2}m_r^{1/2}\gamma l}{2q\hbar(\gamma+1)(U_к - \Phi)} =$$
$$= \frac{\pi\gamma}{2(\gamma+1)}\,\frac{e_0}{q(U_к - \Phi)}\sqrt{\frac{\varepsilon_0 m_r d^2}{\hbar^2}}\,\frac{l}{d} \gg 1,$$

ибо $l/d \gg 1$, а все прочие сомножители — порядка единицы. Таким образом, интерес представляет лишь асимптотика интеграла I при больших значениях a. Ее легко найти, пренебрегая в знаменателе слагаемым t по сравнению с a: аналогично вычисляется и интеграл по участку $(-l_2, 0)$. В результате получим

$$i = \frac{q\Gamma(1/\gamma)}{36\pi\hbar^3\gamma}\int\left[\frac{E_m}{E(p_\perp)}\right]^{1/\gamma}\exp\left\{\frac{E(p_\perp)}{E_m}\right\}\{f_n(W) - \\ - f_p(W)\}\,\delta(p'_\perp - p_\perp)\,\delta(W' - W)\,d^2p'_\perp d^2p_\perp\,dW'dW. \tag{12}$$

При вычислении интеграла в (12) можно пренебречь зависимостью от $p_\perp$ в сомножителе $[E_m/E(p_\perp)]^{1/\gamma}$ (но не в экспоненте!). Действительно, в существенной области значений $p_\perp$ мы имеем $p_\perp^2/\varepsilon_0 m_r \sim (\mu - E_c)/\varepsilon_0 \ll 1$.

Введем обозначение

$$E_0 = \frac{\pi}{2}\frac{\varepsilon_0}{qd}\left(\frac{\varepsilon_0 m_r d^2}{\hbar^2}\right)^{1/2}. \tag{13}$$

Это есть напряженность поля порядка атомного. Отношение E_0/E_m — величина порядка 10. Интегрируя по W' и $p'_\perp$ в (12), получаем

$$i = \frac{q\Gamma(1/\gamma)}{36\pi\hbar^3\gamma}\left(\frac{E_m}{E_0}\right)^{1/\gamma}\int\{f_n(W) - f_p(W)\}\,e^{-\frac{E(p_\perp)}{E_m}}\,dW d^2p_\perp. \tag{14}$$

В случае полного вырождения статистические факторы входят через пределы интегрирования. Для установления последних заметим, что

$$\frac{p_\perp^2}{2m_n} \leqslant W \tag{15а}$$

и в силу изоэнергетичности перехода

$$\frac{p_\perp^2}{2m_p} \leqslant \Delta - q\Phi - W,\ \Delta \equiv \Delta_n + \Delta_p. \tag{15б}$$

Таким образом.

$$0 \leqslant p_\perp^2 \leqslant p^2_{\text{макс}} = \text{мин}\{2m_nW,\ 2m_p(\Delta - q\Phi - W)\}. \tag{16}$$

Далее для W мы имеем (нуль энергии совмещен с дном зоны проводимости):

$$\text{макс}\{\Delta_n - q\Phi,\ 0\} \leqslant W \leqslant \text{мин}\{\Delta_n,\ \Delta - q\Phi\}. \tag{17}$$

Введем обозначения:

$$p_0^2 = \frac{E_m}{E_0}\,\varepsilon_0 m_r,\ W_i = \frac{p_0^2}{2m_i}\quad (i = n,\ p,\ r). \tag{18}$$

Эти величины, строго говоря, зависят от Φ. Однако, как правило, эта зависимость невелика, и можно аппроксимировать выражения (18) их значениями при $\Phi = 0$. Тогда

$$W_i = \frac{m_r}{m_i}\frac{\varepsilon_0}{2\beta},\quad i = n,\ p,\ r,\quad \beta = \frac{E_0}{E_{m,0}}. \tag{19}$$

Параметр β — порядка 10, откуда следует, что величины W_n, W_p, W_r — порядка нескольких сотых электроновольт.

Интегрируя в (14) по $p_\perp$, получим

$$i = \frac{q\Gamma(1/\gamma)}{36\hbar^3\gamma}\left(\frac{E_m}{E_0}\right)^{1/\gamma}p_0^2 e^{-\frac{E_0}{E_m}}\int dW\left\{1 - e^{-\frac{p^2_{\text{макс}}}{p_0^2}}\right\}. \tag{20}$$

Множитель перед интегралом для краткости обозначим через A:

$$A = \frac{q\Gamma(1/\gamma)}{36\hbar^3\gamma}\left(\frac{E_m}{E_0}\right)^{1/\gamma} p_0^2 e^{-\frac{E_a}{E_m}}. \tag{21}$$

Интеграл по W в (20) будем вычислять в предположении, что $\Delta_p > \Delta_n$, т. е. в p-области степень вырождения больше, чем в n-области * (см. рисунок). В применении к германию этот случай, по-видимому, наиболее интересен экспериментально. В зависимости от условий легирования могут представиться два случая: $\Delta_p m_p > \Delta_n m_n$ и $\Delta_p m_p < \Delta_n m_n$, которые мы рассмотрим отдельно (для германия характерен, по-видимому, второй случай). При этом, в силу разрывного характера функций f_n и f_p при $T = 0$ вольтамперную характеристику приходится выписывать отдельно для нескольких участков. Легко проверить, однако, что приводимые ниже выражения в граничных точках непрерывно и с непрерывными производными переходят друг в друга.

1) $\Delta_p m_p - \Delta_n m_n < 0$.

а) $0 \leqslant q\Phi \leqslant \Delta_n - \Delta_p \frac{m_p}{m_n}$: (22а)

$$i = A\left\{q\Phi + W_p e^{-\frac{\Delta_p}{W_p}} - W_p e^{-\frac{\Delta_p - q\Phi}{W_p}}\right\}; \tag{23а}$$

б) $\Delta_n - \Delta_p \frac{m_p}{m_n} \leqslant q\Phi \leqslant \Delta_n$: (22б)

$$i = A\left\{q\Phi + W_r e^{-\frac{\Delta - q\Phi}{W_r}} - W_p e^{-\frac{\Delta_p - q\Phi}{W_p}} - W_n e^{-\frac{\Delta_n - q\Phi}{W_n}}\right\}; \tag{23б}$$

в) $\Delta_n \leqslant q\Phi \leqslant \Delta_p$: (22в)

$$i = A\left\{\Delta_n - W_n + W_r e^{-\frac{\Delta - q\Phi}{W_r}} - W_p e^{-\frac{\Delta_p - q\Phi}{W_p}}\right\}; \tag{23в}$$

г) $\Delta_p \leqslant q\Phi \leqslant \Delta$: (22г)

$$i = A\left\{\Delta - q\Phi + W_r\left(e^{-\frac{\Delta - q\Phi}{W_r}} - 1\right)\right\}. \tag{23г}$$

При $q\Phi \geqslant \Delta$ туннельный ток обращается в нуль.

2) $\Delta_p m_p - \Delta_n m_n > 0$.

Этот случай отличается от первого только в самом начале характеристики. Именно, при

$$0 \leqslant q\Phi \leqslant \Delta_p - \frac{m_n}{m_p}\Delta_n \tag{24а}$$

мы имеем

$$i = A\left\{q\Phi + W_n e^{-\frac{\Delta_n}{W_n}} - W_n e^{-\frac{\Delta_n - q\Phi}{W_n}}\right\}. \tag{25}$$

При

$$\Delta_p - \frac{m_n}{m_p}\Delta_n \leqslant q\Phi \tag{24б}$$

* Это условие фактически не является ограничением. Формулы для противоположного случая получаются из приведенных ниже очевидной заменой обозначений.

плотность тока дается формулами (23б), (23в) и (23г). При использовании формул (23а) — (24б) следует помнить, что величина A также зависит от Φ:

$$A = A_0 \left(1 - \frac{\Phi}{U_к}\right) e^{-\beta\left(1-\frac{\Phi}{U_к}\right)^{-\frac{\gamma}{\gamma+1}}} \tag{26}$$

(A_0 — константа). Поэтому в общем случае вольтамперная характеристика дается довольно сложными выражениями. Они, однако, заметно упрощаются, если принять во внимание, что в области, не слишком близкой к минимуму тока, $\Phi \ll U_к$; кроме того, величины W_p, W_n и W_r малы по сравнению с ε_0.

Вычисляя в этих условиях производную от плотности тока по Φ, легко убедиться в том, что напряжение Φ_m, соответствующее максимуму тока, $\lesssim \Delta_n / q$. Явные формулы для Φ_m легко получить, замечая, что в условиях сильного вырождения

$$\Delta_n \gg W_i, \quad i = n, p, r. \tag{27}$$

В зависимости от соотношений между параметрами задачи (т. е., в конечном счете, от свойств основного материала и от условий легирования) величина Φ_m может выражаться различным образом. Именно, введем обозначение

$$\Phi_0 = \frac{\gamma+1}{\gamma}\frac{U_к}{\beta} \equiv \frac{\gamma+1}{\gamma}\frac{\Delta E + \Delta_p + \Delta_n}{q\beta}. \tag{28}$$

При $q\Phi_0 \gg \Delta_n$ имеем

$$q\Phi_m \simeq \Delta_n. \tag{29}$$

При $q\Phi_0 < \Delta_n$ возможны три случая, в зависимости от соотношения между $q\Phi_0$ и Δ_n. Если справедливы неравенства

$$q\Phi_0 \gg \Delta_n, \quad \exp\left(-2\frac{\Delta_p - \Delta_n}{W_p}\right) \ll 1, \tag{30}$$

то, подобно (29),

$$q\Phi_m = \Delta_n - W_n e^{-\frac{\Delta_p - \Delta_n}{W_p}} \simeq \Delta_n. \tag{31}$$

То же получается и если

$$\Delta_p - \Delta_n \ll W_p. \tag{32}$$

Если, с другой стороны,

$$\frac{q\Phi_0}{W_n}\left\{e^{-\frac{\Delta_n - q\Phi_0}{W_n}} + e^{-\frac{\Delta_p - q\Phi_0}{W_p}}\right\} \ll 1, \tag{33}$$

но $q\Phi_0 \ll \Delta_n$, то

$$\Phi_m \simeq \Phi_0\left\{1 - e^{-\frac{\Delta_p - q\Phi_0}{W_p}} - e^{-\frac{\Delta_n - q\Phi_0}{W_n}}\right\} \simeq \Phi_0. \tag{34}$$

3. НЕПРЯМЫЕ ПЕРЕХОДЫ С УЧАСТИЕМ ФОНОНОВ

Рассматривая переходы с участием фононов, следует иметь в виду, что мы вправе при определенных условиях приравнять нулю температуру, фигурирующую в электронной функции распределения, но не температуру фононов, входящую в формулу для вероятности перехода. Действительно, первое означает лишь малость T по сравнению с температурой вырождения; второе же обозначало бы пренебрежение процессами поглощения фононов.

Поскольку выкладка в принципе совершенно аналогична описанной в § 2, мы приведем здесь лишь окончательный результат (полученный при помощи формул работы [10]). Введем следующие обозначения: M — масса элементарной ячейки; ρ — плотность кристалла; M_{vc} — матричный элемент энергии взаимодействия электронов с фононами, связывающий состояния валентной зоны и зоны проводимости (эта величина имеет размерность энергии); ω — частота фонона, участвующего в процессе;

$$A_F = \frac{\Gamma(1/\gamma)\, q^{5/2} E_m^{3/2} (m_n m_p)^{\gamma/2} M}{2^{9/2}\gamma\pi^{5/2}\hbar^{9/2}(2m_r)^{5/4}\Delta E^{7/4}\rho}\left(\frac{E_m}{E_0}\right)^{1/\gamma} |M_{vc}|^2; \tag{35}$$

$N = \dfrac{1}{e^{\hbar\omega/kT}-1}$ — среднее число фононов частоты ω;

$$D_+ = (N+1)\exp\left\{-\frac{4\sqrt{2m_r}(\Delta E-\hbar\omega)^{3/2}}{3q\hbar E_m}\right\}; \tag{36а}$$

$$D_- = N\exp\left\{-\frac{4\sqrt{2m_r}(\Delta E+\hbar\omega)^{3/2}}{3q\hbar E_m}\right\}; \tag{36б}$$

i_+ — плотность туннельного тока, связанного с испусканием фонона;
i_- — плотность туннельного тока, связанного с поглощением фонона;

$$W_0^{\pm} = \frac{q\hbar E_m}{2\sqrt{2m_r}(\Delta E \mp \hbar\omega)^{1/2}}. \tag{37}$$

Ограничимся, как в § 3, случаем $\Delta_p > \Delta_n$. По-прежнему в силу разрывности функций f_n и f_p вольтамперную характеристику приходится выписывать отдельно для отдельных участков. Мы получим

а) $0 \leqslant q\Phi \leqslant \Delta_n$: (38а)

$$i_- = A_F D_-\left\{\left[1+\exp\left(-\frac{\Delta - q\Phi - \hbar\omega}{W_0^{(-)}}\right)\right][\text{мин}\,(\Delta_n, \Delta - q\Phi - \hbar\omega) - (\Delta_n - q\Phi)] + W_0^{(-)}\left[\exp\left(-\frac{\text{мин}\,(\Delta_n, \Delta - q\Phi - \hbar\omega)}{W_0^{(-)}}\right) - \exp\left(-\frac{\Delta_n - q\Phi}{W_0^{(-)}}\right) - \exp\left(-\frac{\Delta - q\Phi - \hbar\omega - \text{мин}\,(\Delta_n, \Delta - q\Phi - \hbar\omega)}{W_0^{(-)}}\right) + \exp\left(-\frac{\Delta_p - \hbar\omega}{W_0^{(-)}}\right)\right]\right\}, \tag{39а}$$

$$i_+ = A_F D_+\left\{\left[1+\exp-\frac{\Delta - q\Phi + \hbar\omega}{W_0^{(+)}}\right)\right](q\Phi - \hbar\omega) + W_0^{(+)}\left[\exp\left(-\frac{\Delta_n}{W_0^{(+)}}\right) - \exp\left(-\frac{\Delta_n - q\Phi + \hbar\omega}{W_0^{(+)}}\right) - \exp\left(-\frac{\Delta_p - q\Phi + \hbar\omega}{W_0^{(+)}}\right) + \exp\left(-\frac{\Delta_p}{W_0^{(+)}}\right)\right]\right\}; \tag{40а}$$

б) $\Delta_n \leqslant q\Phi \leqslant \Delta_p$: (38б)

$$i_- = A_F D_-\left\{\left[1+\exp\left(-\frac{\Delta - q\Phi - \hbar\omega}{W_0^{(-)}}\right)\right]\text{мин}\,(\Delta_n, \Delta - q\Phi - \hbar\omega) + W_0^{(-)}\left[\exp\left(-\frac{\text{мин}\,(\Delta_n, \Delta - q\Phi - \hbar\omega)}{W_0^{(-)}}\right) - 1 + \exp\left(-\frac{\Delta - q\Phi - \hbar\omega}{W_0^{(-)}}\right) - \exp\left(-\frac{\Delta - q\Phi - \hbar\omega - \text{мин}\,(\Delta_n, \Delta - q\Phi - \hbar\omega)}{W_0^{(-)}}\right)\right]\right\}, \tag{39б}$$

$$i_+ = A_F D_+ \left\{\left[1 + \exp\left(-\frac{\Delta - q\Phi + \hbar\omega}{W_0^{(+)}}\right)\right][\Delta_n - \text{макс}\,(0, \Delta_n - q\Phi + \hbar\omega)] + \right.$$

$$+ W_0^{(+)}\left[\exp\left(-\frac{\Delta_n}{W_0^{(+)}}\right) + \exp\left(-\frac{\Delta - q\Phi + \hbar\omega - \text{макс}\,(0, \Delta_n - q\Phi + \hbar\omega)}{W_0^{(+)}}\right) - \right.$$

$$\left.\left. - \exp\left(-\frac{\Delta_p - q\Phi + \hbar\omega}{W_0^{(+)}}\right) - \exp\left(-\frac{\text{макс}\,(0, \Delta_n - q\Phi + \hbar\omega)}{W_0^{(+)}}\right)\right]\right\}; \quad (40б)$$

в) $\Delta_p \leqslant q\Phi \leqslant \Delta$: (38в)

$$i_- = A_F D_-\left\{(\Delta - q\Phi - \hbar\omega)\left[1 + \exp\left(-\frac{\Delta - q\Phi - \hbar\omega}{W_0^{(-)}}\right)\right] + \right.$$

$$\left. + 2W_0^{(-)}\left[\exp\left(-\frac{\Delta - q\Phi - \hbar\omega}{W_0^{(-)}}\right) - 1\right]\right\}, \quad (39в)$$

$$i_+ = A_F D_+ \left\{\left[1 + \exp\left(-\frac{\Delta - q\Phi + \hbar\omega}{W_0^{(+)}}\right)\right][\Delta - q\Phi - \text{макс}\,(0, \Delta_n - q\Phi + \right.$$

$$\left. + \hbar\omega)] + W_0^{(+)}\left[\exp\left(-\frac{\Delta - q\Phi}{W_0^{(+)}}\right) - \exp\left(-\frac{\text{макс}\,(0, \Delta_n - q\Phi + \hbar\omega)}{W_0^{(+)}}\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{W_0^{(+)}}\right) + \exp\left(-\frac{\Delta - q\Phi + \hbar\omega - \text{макс}\,(0, \Delta_n - q\Phi + \hbar\omega)}{W_0^{(+)}}\right)\right]\right\}. \quad (40в)$$

Полный туннельный ток дается суммой i_- и i_+:

$$i = i_- + i_+. \quad (41)$$

Формулы (38а) — (40в) довольно громоздки. Нетрудно усмотреть, однако, два обстоятельства.

а) При малых напряжениях (на восходящей ветви кривой) имеется структура, связанная с необходимостью затратить часть энергии внешнего поля на образование фонона и неоднократно наблюдавшаяся экспериментально разными авторами.

б) Структура формул (38а) — (40в) в основном такая же, как и у соответствующих выражений § 2 (формулы (22а) — (25)); следует лишь формально положить в последних * $W_n = W_p = W_r = W_0 \equiv W_0^{\pm}|_{\omega\to 0}$ (здесь принято во внимание, что в рассматриваемом случае $\hbar\omega \ll \Delta_n$). Поэтому остаются в силе основные качественные выводы § 2. В частности, справедливы формулы (30) — (34) для Φ_m (с заменой W_n и W_p на W_0 и ε_0 на ΔE).

4. НЕПРЯМЫЕ ПЕРЕХОДЫ ПРИ РАССЕЯНИИ НА ЗАРЯЖЕННОЙ ПРИМЕСИ

Введем обозначения

$$A_t = \frac{\Gamma(1/\gamma)\, q^{5/2} E_m^{3/2} (m_n m_p)^{3/2} (E_m / E_0)^{1/\gamma}}{2^{9/2}\gamma\pi^{5/2}\hbar^{9/2}(2m_r)^{5/4}\Delta E^{7/4}} |N_{cv}\varphi|^2 N_{\text{пр}} \exp -\frac{4\sqrt{2m_r}\,\Delta E^{3/2}}{3qE_m\hbar}, \quad (42)$$

$$W_t = \frac{q\hbar E_m}{2\sqrt{2m_r\Delta E}}. \quad (43)$$

Тогда, пользуясь формулами работы [12] и методикой § 2, находим

а) $0 \leqslant q\Phi \leqslant \Delta_n$: (44а)

$$i = A_t\left\{\left(1 - e^{-\frac{\Delta - q\Phi}{W_t}}\right) q\Phi + W_t\left[e^{-\frac{\Delta_n}{W_t}} + e^{-\frac{\Delta_p}{W_t}} - e^{-\frac{\Delta_n - q\Phi}{W_t}} - e^{-\frac{\Delta_p - q\Phi}{W_t}}\right]\right\} \quad (45а)$$

* Так можно поступить вблизи максимума и на нисходящей ветви кривой.

б) $\Delta_n \leqslant q\Phi \leqslant \Delta_p$: (44б)

$$i = A_t\left\{\left(1 - e^{-\frac{\Delta - q\Phi}{W_t}}\right)\Delta_n + W_t\left[e^{-\frac{\Delta_n}{W_t}} - 1 - e^{-\frac{\Delta_p - q\Phi}{W_t}} + e^{-\frac{\Delta - q\Phi}{W_t}}\right]\right\}; \quad (45б)$$

в) $\Delta_p \leqslant q\Phi \leqslant \Delta$: (44в)

$$i = A_t\left\{\left(1 + \exp\left(-\frac{\Delta - q\Phi}{W_t}\right)\right)(\Delta - q\Phi) + 2W_t\left[\exp\left(-\frac{\Delta - q\Phi}{W_t}\right) - 1\right]\right\}. \quad (45в)$$

Для максимума тока вновь получаются формулы (30) — (34) (с заменой W_n, W_p и W_r на W_t и ε_0 на ΔE).

5. ОТРИЦАТЕЛЬНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

Полученные в предыдущих параграфах выражения для вольтамперной характеристики позволяют, в частности, исследовать отрицательное сопротивление туннельного диода. По определению мы имеем (в области, где производная $\partial i / \partial \Phi < 0$)

$$\frac{1}{R} \equiv \sigma = -\frac{\partial i}{\partial \Phi}, \quad (46)$$

Согласно формулам (23а) — (23г) и (45а), (45б) мы получаем (используя по-прежнему условие сильного вырождения $\Delta_n \gg W_n, W_p, W_r \ldots$):

а) Прямые переходы.

При

$$\Phi_m \leqslant \Phi \leqslant \frac{\Delta_n}{q} \quad (47а)$$

$$\sigma(\Phi) = \frac{Aq}{\Phi_0}\left\{\Phi - \Phi_0 + \Phi_0 e^{-\frac{\Delta_n - q\Phi}{W_n}}\right\}. \quad (48а)$$

При

$$\frac{\Delta_n}{q} \leqslant \Phi \leqslant \frac{\Delta_p}{q} \quad (47б)$$

$$\sigma(\Phi) = \frac{Aq}{\Phi_0}\left\{\frac{\Delta_n}{q} + \Phi_0 e^{-\frac{\Delta_p - q\Phi}{W_p}}\right\}. \quad (48б)$$

При

$$\frac{\Delta_p}{q} \leqslant \Phi \leqslant \frac{\Delta}{q} \quad (47в)$$

$$\sigma(\Phi) = \frac{Aq}{\Phi_0}\left\{\frac{\Delta}{q} - \Phi + \Phi_0 - \Phi_0 e^{-\frac{\Delta - q\Phi}{W_r}}\right\}. \quad (48в)$$

б) Непрямые переходы с рассеянием на примеси.

$$\Phi_m \leqslant \Phi \leqslant \frac{\Delta_n}{q}, \quad (49а)$$

$$\sigma(\Phi) = \frac{A_t q}{\Phi_0}\left\{\Phi - \Phi_0 + \Phi_0 \exp -\frac{\Delta_n - q\Phi}{W_t}\right\}. \quad (50а)$$

При

$$\frac{\Delta_n}{q} \leqslant \Phi \leqslant \frac{\Delta_p}{q} \quad (49б)$$

$$\sigma(\Phi) = \frac{A_t q}{\Phi_0}\left\{\frac{\Delta_n}{q} + \Phi_0 \exp -\frac{\Delta_p - q\Phi}{W_t}\right\}. \quad (50б)$$

При $$\frac{\Delta_p}{q} \leqslant \Phi \leqslant \frac{\Delta}{q} \tag{49в}$$

$$\sigma(\Phi) \sim \frac{A_t q}{\Phi_0}\left\{\frac{\Delta}{q} - \Phi + \Phi_0\left[-\left(1 + \frac{\Delta - q\Phi}{W_t}\right)\exp - \frac{\Delta - q\Phi}{W_t} + 1\right]\right\}. \tag{50в}$$

Напомним, что в данном случае в формулу для E_0 (и, следовательно, для Φ_0) следует вместо ε_0 подставить термическую ширину запрещенной зоны ΔE.

Формулы (48а) — (48в) и (50а) — (50в) обладают весьма сходной структурой. Аналогичные (но несколько более громоздкие) выражения получаются и в случае непрямых переходов с рассеянием на фононах. Видно, что отрицательное сопротивление довольно сложно зависит от внешнего напряжения Φ. Эта зависимость даже не монотонна. Вычисляя производные $\partial\sigma/\partial\Phi$ и $\partial^2\sigma/\partial\Phi^2$, легко убедиться в том, что абсолютная величина отрицательной проводимости $\sigma(\Phi)$ достигает максимума в интервале $\Phi_m < \Phi \leqslant \Delta_n/q$, может (при определенных условиях) иметь минимум на втором участке ($\Delta_n \leqslant q\Phi \leqslant \Delta_p$) и монотонно убывает при $q\Phi > \Delta_p$, обращаясь в нуль при $q\Phi = \Delta$.

Для точки минимума Φ'' мы получаем

$$q\Phi'' \simeq \Delta_p - 2W_p \ln \frac{q\Phi_0}{\sqrt{\Delta_n W_p}} \tag{51}$$

в случае прямых «переходов» и

$$q\Phi'' \simeq \Delta_p - 2W_t \ln \frac{q\Phi_0}{\sqrt{\Delta_n W_t}} \tag{52}$$

в случае непрямых переходов при рассеянии на заряженной примеси. Эти выражения справедливы, коль скоро $q\Phi_0 > \sqrt{\Delta_n W_p}$ или, соответственно, $q\Phi_0 > \sqrt{\Delta_n W_t}$. Если указанные неравенства не выполняются (что возможно при достаточно больших значениях Δ_n), то функция $\sigma(\Phi)$ не имеет минимума, а монотонно убывает в интервале $\Delta_n \leqslant q\Phi \leqslant \Delta$.

Вычисление напряжения Φ', при котором σ достигает максимума, осложняется благодаря разрывам производной $\partial\sigma/\partial\Phi$ на границах областей. Наличие этих разрывов связано, по-видимому, с аппроксимацией полного вырождения; поэтому для окончательного решения вопроса о максимуме отрицательной проводимости надо рассматривать случай отличных от нуля температур. Здесь мы отметим лишь, что для прямых переходов при условиях

$$2q\Phi_0 < \Delta_n < \frac{2q\Phi_0 + W_n}{1 - 2\dfrac{W_n}{q\Phi_0}} \tag{53}$$

мы имеем

$$q\Phi' \simeq \Delta_n - 2W_n \ln \frac{q\Phi_0}{\sqrt{W_n(\Delta_n - 2q\Phi_0)}}\,. \tag{54}$$

Аналогичные формулы (с заменой W_n на W_t и ε_0 на ΔE) справедливы и для непрямых переходов с рассеянием на примеси; такие же результаты получаются при рассеянии на фононах.

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Резюмируя, отметим три обстоятельства.

Во-первых, формулы для различных наблюдаемых величин (Φ_m, Φ', Φ'') оказываются по существу одинаковыми (с точностью до небольшого изменения некоторых параметров) при различных механизмах туннельного тока. Исключение составляет вид вольтамперной характеристики при низких температурах решетки, когда формулы (39а) —(39в)

и (40а) — (40в) описывают характерную «фононную» структуру, неоднократно уже наблюдавшуюся экспериментально [13].

Во-вторых, учет неоднородности поля в переходе оказывается существенным * (особенно при вычислении абсолютной величины тока). Действительно, мы можем формально перейти к случаю однородного поля, полагая всюду $\gamma \to \infty$. Как легко усмотреть из формул (4), (21), (35) и (42), показатели степени в выражениях для A, A_F, $D_{\pm}$, A_l могут измениться в два раза при изменении γ от 1 до ∞. При этом по абсолютной величине показатели степени меняются от ~ 10 до ~ 20, т. е. величина туннельного тока меняется весьма заметно. Меняются также (но гораздо слабее) и точки Φ', Φ'', Φ_m. Причина этого очевидна; она состоит в резкой зависимости туннельного тока от напряженности поля, в результате чего даже малая область локального повышения поля может дать важный (не пропорциональный размерам этой области) вклад в ток.

В-третьих, все полученные выше выражения существенно зависят от параметров Δ_n и Δ_p, отражающих условия легирования образца. При изменении этих величин может измениться не только численное значение того или иного характерного напряжения (Φ_m, Φ', Φ''), но и вид функциональной зависимости его от параметров системы. Более того, даже сам факт наличия или отсутствия минимума отрицательной проводимости, как мы видели в предыдущем параграфе, определяется условиями легирования. Таким образом, туннельный диод представляет собой в технологическом отношении очень «гибкую» систему, свойствами которой можно в значительной степени управлять.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Л. Бонч-Бруевич, Радиотехника и электроника, 1960, **5**, 12, 2033.
2. E. O. Kane, J. Appl. Phys., 1961, **32**, 1, 83.
3. Ю. И. Иванчик, Физика твердого тела, 1961, **3**, 1, 103.
4. H. L. Frisch, S. P. Lloyd, Phys. Rev., 1960, **120**, 4, 1175.
5. Nick Holonyak, Jr, J. Appl. Phys., 1961, **32**, 2, 130.
6. В. Л. Бонч-Бруевич, А. Г. Миронов, Физика твердого тела, 1961, **3**, 10.
7. R. C. Klauder, Phys. Rev. (в печати)**.
8. Б. М. Вул, Докл. АН СССР, 1954, **96**, 2, 257.
9. Л. В. Келдыш, ЖЭТФ, 1957, **33**, 4, 994.
10. Л. В. Келдыш, ЖЭТФ, 1958, **34**, 4, 962.
11. E. O. Kane, Phys. Chem. Sol., 1960, **12**, 2, 181.
12. П. С. Серебренников. Радиотехника и электроника (в печати).
13. N. Holonyak et al., Phys. Rev. Letters, 1959, **3**, 4, 167.

Поступила в редакцию
11 VII 1961

---

* Авторы признательны С. Г. Калашникову, обратившему их внимание на важность этого следствия из развитой выше теории.

** Авторы признательны М. Лэксу за присылку препринта этой работы.

О ТЕРМОЭЛЕКТРОННЫХ КОНСТАНТАХ

Л. Н. Добрецов

В статье рассматривается вопрос о термоэлектронных контактах, фигурирующих в различных уравнениях, определяющих плотности термоэлектронных токов в случае однородных электродов.

В последнее время, в связи с проблемой термоэлектронных преобразователей тепловой энергии в электрическую, вновь возник интерес к вопросу о так называемых термоэлектронных константах. Мы убедились, что у ряда лиц, занимающихся упомянутой выше проблемой, нет полной ясности в этом вопросе. В связи с этим нам кажется полезно еще раз рассмотреть вопрос о термоэлектронных постоянных, фигурирующих в различных уравнениях, определяющих плотности термоэлектронных токов. Мы ограничимся рассмотрением лишь случая однородных электродов.

Пусть состояние электрона в зоне проводимости кубического кристалла объемом L^3 характеризуется волновой функцией $\psi(\vec{r}) = f_{\vec{p}}(\vec{r}) \times \exp\left[\frac{2\pi i}{h}(\vec{p}\,\vec{r})\right]$, т. е. определяется тремя составляющими квази-импульса: $p_x = \frac{h}{L} S_x$, $p_y = \frac{h}{L} S_y$, $p_z = \frac{h}{L} S_z$, где S_x, S_y, S_z — целые числа. Если ось x направлена по нормали к некоторой поверхности тела, то коэффициент прохождения этого электрона над потенциальным порогом у поверхности D и коэффициент отражения от порога $R = 1 - D$, как известно из квантовой механики, зависят лишь от одной составляющей квази-импульса p_x, т. е.

$$D = D(p_x) = 1 - R(p_x).$$

Если числовая плотность потока электронов, падающих изнутри тела на его поверхность, с данным значением p_x задается функцией распределения $\nu(p_x)$, то плотность тока насыщения термоэлектронной эмиссии j, выходящего через эту поверхность эмиттера, будет равна

$$j = \varepsilon \int D(p_x)\,\nu(p_x)\,dp_x, \tag{1}$$

где интегрирование надо производить лишь по тем значениям p_x, которым соответствует полная энергия E_x, связанная с движением электрона по оси x, бо́льшая нуля, т. е. $E_x > 0$ (в отсутствие внешнего поля у этой поверхности эмиттера для тех значений p_x, для которых $E_x < 0$, величина D равна нулю). Величины E_x отсчитываются от энергии электрона, покоящегося вне тела.

Формулу (1) можно представить в виде

$$j = \varepsilon \overline{D} \int \nu(p_x)\,dp_x, \tag{1a}$$

где

$$\overline{D} = \frac{\int D(p_x)\,\nu(p_x)\,dp_x}{\int \nu(p_x)\,dp_x}, \tag{2}$$

т. е. $\overline{D}$ есть значение коэффициента прохождения над барьером, усредненное по той части распределения $\nu(p_x)$, которой соответствуют $E_x > 0$.

В теории металлов по Зоммерфельду, в которой состояния электронов внутри тела описываются плоскими волнами де-Бройля $\psi(\vec{r}) = \exp\left[\frac{2\pi i}{h}(\vec{p}\,\vec{r})\right]$ и квази-импульс равен импульсу, полная энергия равна $E = E_a + \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)$ и $E_x = E_a + \frac{1}{2m}p_x^2$ (см. рис. 1). При этом $p_x = \sqrt{2m(E_x - E_a)}$, т. е. p_x просто выражается через E_x, и поэтому $D(p_x)$ и $\nu(p_x)$ можно представить в виде $D(E_x)$ и $\nu(E_x)$, а (1) и (1а) переписать так:

$$j = \varepsilon \int_0^\infty D(E_x)\,\nu(E_x)\,dE_x, \quad (1б)$$

$$j = \varepsilon \overline{D} \int_0^\infty \nu(E_x)\,dE_x, \quad (1в)$$

где

$$\overline{D} = \frac{\int_0^\infty D(E_x)\,\nu(E_x)\,dE_x}{\int_0^\infty \nu(E_x)\,dE_x} \quad (2а)$$

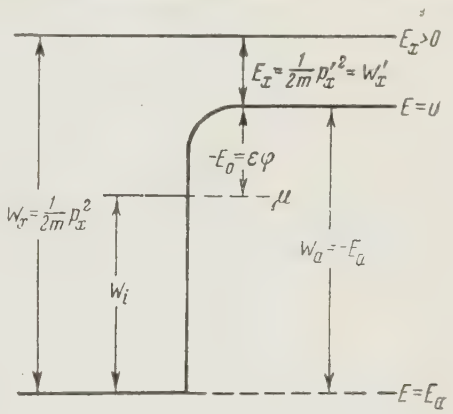


Рис. 1.

— коэффициент прохождения над барьером, усредненный по распределению $\nu(E_x)$ в интервале значений E_x от нуля до бесконечности.

Как известно, коэффициенты прохождения над любым потенциальным порогом для электронов с данным значением E_x, падающих на порог как с одной стороны (например, для электронов эмиттера на его границу изнутри) $D(E_x)$, так и с другой стороны (например, для электронов, испущенных другим эмиттером, или для электронов из электронного газа над поверхностью данного эмиттера, падающих на ту же границу извне) $D'(E_x)$ равны друг другу. Пусть над поверхностью эмиттера имеется равновесный электронный газ, в котором распределение электронов в потоке по $W_x = W_x'$ дается функцией $\nu'(E_x)$. Поток, уходящий из газа внутрь эмиттера с энергиями E_x, в интервале dE_x будет равен $D'(E_x)\,\nu'(E_x)\,dE_x$, а поток, выходящий из эмиттера с теми же значениями E_x, равен $D(E_x)\,\nu(E_x)\,dE_x$. По принципу детального равновесия эти потоки должны равняться друг другу, т. е. $D'(E_x)\,\nu'(E_x)\,dE_x = D(E_x)\,\nu(E_x)\,dE_x$. Учитывая, что $D(E_x) = D'(E_x)$, получаем $\nu'(E_x) = \nu(E_x)$. Отсюда следует, что

$$\overline{D} = \frac{\int_0^\infty D(E_x)\,\nu(E_x)\,dE_x}{\int_0^\infty \nu(E_x)\,dE_x} = \frac{\int_0^\infty D'(E_x)\,\nu'(E_x)\,dE_x}{\int_0^\infty \nu'(E_x)\,dE_x} = \overline{D}',$$

т. е. одинаковы не только $D(E_x)$ и $D'(E_x)$, но одинаковы и усредненные значения $\overline{D}$ и $\overline{D}'$ для потока электронов, падающих изнутри эмиттера $E_x > 0$ на некоторую его поверхность, и для потока электронов, падающих извне из равновесного электронного газа. Если в (1 в) подставить $\nu(E_x)$ $\frac{4\pi kT}{h^3}\exp\left[\frac{W_i - W_x}{kT}\right] - \frac{4\pi kT}{h^3}\exp\left[\frac{E_0 - E_x}{kT}\right]$ (см. рис. 1),

вытекающее из теории Зоммерфельда для случая $-E_0 = W_a - W_i \gg kT$, то оно, как известно, переходит в уравнение

$$j = A_0 \overline{D}\, T^2 \exp\left[\frac{W_a - W_i}{kT}\right] = A_0 \overline{D} T^2 \exp\left[\frac{E_0(T)}{kT}\right]. \qquad (3)$$

Величину A_0 называют термоэлектронной константой. По Зоммерфельду она одинакова для всех металлов и равна

$$A_0 = \frac{4\pi m e k^2}{h^2} = 120\ a/см^2 \cdot град^2.$$

Можно было бы думать, что утверждение об универсальности A_0 является следствием тех упрощающих предположений, которые содержатся в теории «свободных электронов» Зоммерфельда. В таком случае для эмиттеров, к которым теория Зоммерфельда неприменима, утверждение об универсальности термоэлектронной постоянной не обязательно, и множитель перед $\overline{D}T^2 \exp\left[\frac{E_0(T)}{kT}\right]$ может оказаться иным, не равным A_0. Покажем, что это не так.

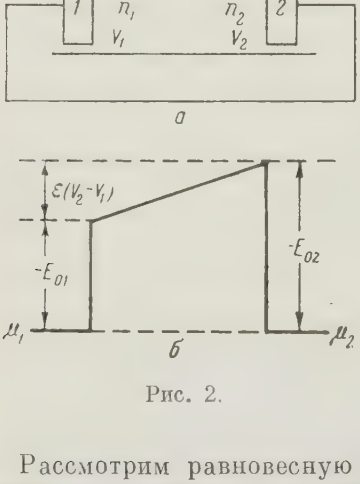


Рис. 2.

Запишем уравнение для плотности тока термоэмиссии в виде

$$j = f(T) \exp\left[\frac{E_0(T)}{kT}\right]. \qquad (3а)$$

Поскольку никаких предположений о функции $f(T)$ не делается, такая запись не содержит никаких ограничений общности.

Рассмотрим равновесную изотермическую систему, содержащую два различных эмиттера, соединенных друг с другом проводником (рис. 2, *в*). Равновесие электронов внутри обоих эмиттеров, электрически соединенных друг с другом, будет иметь место, если уровни электрохимических потенциалов μ_1 и μ_2 в обоих эмиттерах (см. рис. 2, *б*) выравняются. Пусть расстояние между эмиттерами таково, что над каждым из них имеются электронные газы, состояния которых определяются свойствами каждого эмиттера в отдельности. Равновесие между электронным газом внутри первого эмиттера и электронным газом над его поверхностью наступит тогда, когда плотность потока термоэлектронов, уходящих из эмиттера в газ, равная j_1/ε, станет равной плотности потока термоэлектронов, уходящих из газа внутрь эмиттера. Последняя равна $\overline{D}_1' \nu_1 = \overline{D}_1' \frac{1}{4} n_1 \bar{v}_1$, где ν_1 — плотность потока электронов, падающих на первый эмиттер; n_1 — числовая концентрация электронов над поверхностью первого эмиттера; v_1 — средняя тепловая скорость этих электронов. Отсюда $j_1/\varepsilon = \frac{1}{4} \overline{D}_1' n_1 v_1$ или, учитывая (3а),

$$n_1 = \frac{4 j_1}{\varepsilon \overline{D}_1' \bar{v}_1} = \frac{4 f_1(T)}{\varepsilon \overline{D}_1' \bar{v}_1} \exp\left[\frac{E_{01}(T)}{kT}\right]. \qquad (4)$$

Аналогично выразится и равновесная числовая концентрация электронов в газе над поверхностью второго эмиттера;

$$n_2 = \frac{4 j_2}{\varepsilon \overline{D}_2' \bar{v}_2} = \frac{4 f_2(T)}{\varepsilon \overline{D}_2' \bar{v}_2} \exp\left[\frac{E_{02}(T)}{kT}\right]. \qquad (4а)$$

Из (4) и (4а), учитывая, что вследствие $T = \text{const}$ $\bar{v}_1 = \bar{v}_2$ получаем

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{f_1(T)}{f_2(T)} \frac{\bar{D}_2'}{\bar{D}_1'} \exp\left[\frac{E_{01} - E_{02}}{kT}\right]. \quad (5)$$

Наконец, если электронные газы над поверхностями первого и второго эмиттеров будут невырожденными (что с большим запасом имеет место для всех известных эмиттеров) и взаимная потенциальная энергия электронов в них будет достаточно мала по сравнению с kT (что также справедливо для известных эмиттеров [1]), то эти газы окажутся в равновесии друг с другом, если отношение концентраций электронов в них будет удовлетворять уравнению Больцмана:

$$\frac{n_1}{n_2} = \exp\left[\frac{\varepsilon(V_2 - V_1)}{kT}\right], \quad (6)$$

где $\varepsilon(V_2 - V_1)$ — разность потенциальных энергий электронов над поверхностями второго и первого эмиттеров в поле контактной разности потенциалов: $\varepsilon(V_2 - V_1) = E_{01} - E_{02}$ (рис. 2, *б*). Учитывая это, получаем из (5) и (6)

$$\frac{f_1(T)}{\bar{D}_1'} = \frac{f_2(T)}{\bar{D}_2'} = F(T). \quad (7)$$

Так как в нашем рассмотрении никаких ограничивающих предположений о свойствах рассматриваемых эмиттеров, кроме предположения об идеальности равновесных электронных газов над ними, не делалось, то $F(T)$ в (7) есть универсальная функция температуры для любых эмиттеров, для которых последнее предположение справедливо. Поэтому (3а) можно представить в виде

$$j = F(T)\bar{D}\exp\left[\frac{E_0(T)}{kT}\right]. \quad (8)$$

Но для зоммерфельдовского эмиттера по (3) $F(T) = A_0T^2$. Поэтому и для эмиттера любой природы (и не только для металлов) верно уравнение (3) с тем же значением термоэлектронной константы A_0. Учитывая, что $E_0(T) = -\varepsilon\varphi(T)$, перепишем (1а) в более привычном виде:

$$j = A_0\bar{D}T^2\exp\left[-\frac{\varepsilon\varphi(T)}{kT}\right]. \quad (9)$$

Если в некотором интервале температур около значения T_0 с достаточной точностью $\varphi(T)$ можно представить линейной функцией, т. е. если

$$\varphi(T) = \varphi(T_0) + \alpha(T - T_0), \quad (10)$$

то температурную зависимость тока насыщения можно представить в виде

$$j = A_1T^2\exp\left[-\frac{\varepsilon\psi}{kT}\right], \quad (11)$$

где $\psi = \varphi(T_0) - \alpha T_0$ — не зависящая от T постоянная для данного эмиттера (эффективная или ричардсонова работа входа); $A_1 = A_0\bar{D}\exp\times$ $\times\left[-\frac{\varepsilon\alpha}{kT}\right]$. График функции $\ln\frac{j}{T^2} = F\left(\frac{1}{T}\right)$ будет в этом интервале температур прямой линией («прямая Ричардсона»), тангенс угла наклона которой к оси абсцисс $\frac{d\left(\ln\frac{j}{T^2}\right)}{d\left(\frac{1}{T}\right)}$ равен $\varepsilon\psi/k$, а отсечка оси ординат,

даваемая продолжением прямой Ричардсона до этой оси, будет равна $\ln A_1$. Постоянную A_1 в (11) также принято называть термоэлектронной постоянной, как и A_0 в (9). Для того чтобы отличать эти две постоянные, мы назовем A_0 зоммерфельдовой термоэлектронной постоянной эмиттера, а A_1 в (11), определяемую из прямой Ричардсона, — ричардсоновой термоэлектронной постоянной эмиттера.

Как показано выше, зоммерфельдова термоэлектронная постоянная — универсальная для всех эмиттеров и не зависящая от температуры величина. Ричардсоновы термоэлектронные постоянные разных эмиттеров могут быть различны: во-первых, из-за неодинаковости как знака, так и величины температурного коэффициента работы выхода α и, во-вторых, из-за отличия в значениях $\overline{D}$ для них. Чисто теоретически даже в области применимости (10) ричардсонова термоэлектронная постоянная может зависеть от температуры из-за зависимости коэффициента прохождения электронов от E_x. Действительно, если $D = D(E_x)$, то усреднения по распределениям электронов по E_x, различным при разных температурах, дадут $\overline{D} = \overline{D}(T)$, т. е. $A_1 = A_1(T)$.

Наличие температурной зависимости работы выхода $\varphi(T)$ и наличие отражения на границе эмиттер — вакуум, учитываемого $\overline{D}$, приводит, как известно, к трудности определения истинных работ выхода по сравнительно легко измеряемым величинам j и T. Действительно, из (9) следует, что $\varphi(T) = \frac{kT}{\varepsilon}\left[\ln A_0 + \ln \overline{D} - \ln \frac{j}{T^2}\right]$; если бы $\overline{D}$ для данного эмиттера было известно, то, измерив j при некоторой температуре T, можно было бы вычислить $\varphi(T)$. В методе «полного тока» вычисляют работу выхода из уравнения $\varphi_{\text{пт}} = \frac{kT}{\varepsilon}\left[\ln A_0 - \ln \frac{j}{T^2}\right]$, т. е. отбрасывают слагаемое $\frac{kT}{\varepsilon}\ln \overline{D} < 1$. Таким образом, этот метод дает несколько завышенные значения работы выхода. Эти значения не «испорчены» неучетом температурной зависимости $\varphi(T)$, но испорчены неучетом отражения. Определяемая из наклона прямых Ричардсона $\frac{d\left(\ln \frac{j}{T^2}\right)}{d\left(\frac{\varepsilon}{kT}\right)}$ работа выхода, как видно из (11), не испорчена неучетом отражения, но отличается от истинной работы выхода на величину αT_0, которая у разных эмиттеров может быть как больше, так и меньше нуля. Предпочтительность того или иного метода зависит от соотношения величин $\frac{kT}{\varepsilon}\ln \overline{D}$ и αT_0 (для эмиттеров с $\alpha > \sim 5 \cdot 10^{-5}$ *в/град* метод полного тока дает меньшую погрешность, если $\overline{D} > \sim 0{,}5$).

Рассмотрим прохождение тока электронов, эмиттированных одним из электродов плоского диода, например электродом *1* рис. 2,*а*. Будем считать, что расстояние между электродами таково, что объемный заряд в межэлектродном пространстве можно не учитывать и пренебречь рассеянием электронов в нем. Учтем многократное отражение электронов как на поверхности эмиттера *1*, так и на поверхности коллектора *2*.

Обозначим величину $E_x - E_0$ через W_x (см. рис. 3); коэффициенты прохождения над потенциальными барьерами первого и второго эмиттеров будут, очевидно, зависеть от W_{x1} и W_{x2} соответственно: $D_1(W_{x1})$ и $D_2(W_{x2})$. Пусть распределение электронов в потоке, падающем изнутри первого эмиттера на его границу, по W_{x1} дается функцией $\nu(W_{x1})$. Поток электронов данного интервала $dE_x = dW_{x1}$, выходящий из эмиттера и достигающий коллектора, будет $D_1(W_{x1})\nu(W_{x1})dW_{x1}$. Поток, уходящий в коллектор при первом же падении на него, будет равен $D_1(W_{x1})\nu_1(W_{x1})dW_{x1}D_2(W_{x2})$, где $W_{x2} = W_{x1} - \varepsilon V$ (см. рис. 3). Легко видеть, что поток, уходящий в коллектор при втором падении на него,

после отражения на обоих электродах окажется равным $D_1(W_{x1})\nu_1(W_{x1})\times$ $\times dW_{x1}R_2(W_{x2})R_1(W_{x1})D_2(W_{x2})$, при третьем падении — $D_1(W_{x1})\times$ $\times\nu_1(W_{x1})dW_{x1}[R_2(W_{x2})R_1(W_{x1})]^2D_2(W_{x2})$ и т. д. Полное количество электронов из числа $\nu_1(W_{x1})dW_{x1}$, упавших изнутри на границу эмиттера, уходящих в коллектор после всех отражений на электродах, равное сумме отдельных потоков, будет равно

$$d\nu_{12}=\frac{D_1(W_{x1})D_2(W_{x2})}{1-R_1(W_{x1})R_2(W_{x2})}\nu_1(W_{x1})dW_{x1}. \tag{12}$$

Нетрудно, убедиться, что поток электронов, уходящих из второго эмиттера в первой с тем же значением E_x, будет равен

$$d\nu_{21}=\frac{D_1(W_{x1})D_2(W_{x2})}{1-R_1(W_{x1})R_2(W_{x2})}\nu_2(W_{x2})dW_{x2}. \tag{12а}$$

Будем называть величину $D_1(W_{x1})D_2(W_{x2})/1-R_1(W_{x1})R_2(W_{x2})$ комбинированным коэффициентом прохождения диода и обозначать $D_{12}(E_x, V)$.

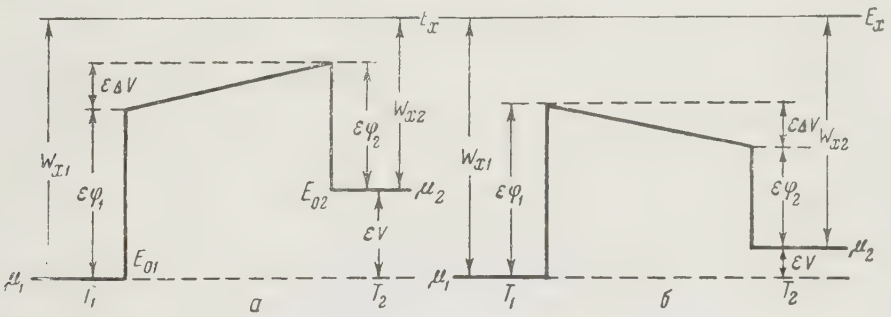


Рис. 3

Эта величина, как видно, зависит от свойств обоих электродов диода, но для электронов с данным E_x при любом значении внешней разности потенциалов V она одинакова у потоков, идущих из обоих электродов данного диода:

$$D_{12}(E_x, V)=D_{21}(E_x, V). \tag{13}$$

Отсюда вытекает важный для понимания закономерностей термоэлектронной эмиссии вывод.

Рассмотрим опять равновесную изотермическую систему, т. е. $T_1=T_2$ и $V=0$. По принципу детального равновесия потоки электронов $d\nu_{12}$ и $d\nu_{21}$ в такой системе должны равняться друг другу. Отсюда, используя (12), (12а) и (13), находим

$$\nu_1(E_x-E_{01})=\nu_2(E_x-E_{02})\ \text{при}\ T=\text{const}, \tag{14}$$

т. е. плотности потоков электронов, падающих изнутри любого эмиттера на его границу при одинаковых температурах их для одинаковых значений E_x, отсчитанных от уровней электрохимических потенциалов в этих эмиттерах, одинаковы. Так как функции распределения $\nu(E_x-E_0)$ определяются свойствами эмиттеров (и температурой), то равенство (14) окажется верным независимо от того, образуют эмиттеры равновесную систему или нет.

На первый взгляд этот результат представляется неожиданным, так как плотность состояний, соответствующих некоторому значению

$E_x - E_0$, а следовательно, и число электронов с этими значениями E_x в различных телах, конечно, различны.

Разъясним вопрос об универсальности плотности потока в разных телах на примере одномерной модели кристалла. Плотность состояний dZ/dE, соответствующих некоторому значению E, в одномерном кристалле равна $2\frac{dp_x}{dE}$, где dp_x — число значений квази-импульса, соответствующих интервалу энергий от E до $E + dE$. Число электронов в этом интервале энергий будет равно $dn(E) = 2\frac{dp_x}{dE}\left[\exp\left(\frac{E-E_0}{kT}\right)+1\right]^{-1}dE$, а поток их $dv = v_{гр}\,dn(E)$. Здесь $v_{гр}$ — групповая скорость ($v_{гр} = dE/dp$); поэтому $dv = 2\left[\exp\left(\frac{E-E_0}{kT}\right)+1\right]^{-1}dE$. Таким образом, хотя $Z(E) = 2\frac{dp_x}{E}$ различно в разных телах, произведение $Z(E)$ на $v_{гр}$, определяющее $v(E)$, для одинаковых $(E - E_0)$ при $T = \text{const}$ во всех телах одинаково. Но тогда выражения (1а) для всех тел одинаковы, что и объясняет универсальность уравнения (3), его независимость от зонной схемы эмиттера. Заметим, что эти соображения, приводящие к универсальности (3), не опираются на предположение об идеальности равновесного электронного газа над поверхностью эмиттера.

Вернемся к вопросу о плотности токов, идущих с одного электрода в другой в плоском диоде. Рассмотрим сначала режим *а* на рис. 3. Из потока электронов $A_0 T^2 \exp\left[-\frac{\varepsilon}{kT_1}\varphi_1(T_1)\right]$, падающего изнутри эмиттера *1* на его границу, дойдет до электрода *2* лишь часть $\gamma(\Delta V, T_1)$ электронов, у которых $W_{x1} - \varepsilon\varphi_1 = W'_{x1} \geqslant \varepsilon\Delta V$, т. е.

$$\gamma(T_1, \Delta V) = \frac{\int_{\varepsilon\Delta V}^{\infty} v'_{T_1}(W'_{x1})\,dW'_{x1}}{\int_{0}^{\infty} v'_{T_1}(W'_{x1})\,dW'_{x1}}. \qquad (15)$$

Из этой части вследствие отражений на электродах *1* и *2* уйдет во второй электрод ток, плотность которого

$$j_{12}^{(a)} = A_0 T_1^2 \overline{D_{12}^{(a)}}(T_1, \Delta V)\,\gamma(T_1, \Delta V)\exp\left[-\frac{\varepsilon}{kT_1}\varphi_1(T_1)\right], \qquad (16)$$

где $\overline{D_{12}^{(a)}}(T_1, \Delta V)$ — усредненное по W'_{x1} и $W'_{x2} = W'_{x1} - \varepsilon V$ значение комбинированного коэффициента прохождения диода. При этом усреднение $D_1(W'_{x1})$ и $R_1(W'_{x1})$ в выражении $D_{12}^{(a)}$ надо производить по функции распределения $v_{T_1}(W'_{x1})$, соответствующей температуре T_1, в интервале $\infty > W'_{x1} > \varepsilon\Delta V$, а усреднение $D_2(W'_{x2})$ и $R_2(W'_{x2})$ — по той же функции распределения, но в интервале $\infty > W'_{x2} > 0$. Уравнение (16) можно переписать в виде

$$j_{12}^{(a)} = A_{12}^{(a)} T_1^2 \gamma(T_1, \Delta V)\exp\left[-\frac{\varepsilon}{kT_1}\varphi_1(T_1)\right], \qquad (16а\,[12])$$

где $A_{12}^{(a)} = A_0\overline{D_{12}^{(a)}}$ будем называть комбинированной термоэлектронной константой электрода *1* в режиме *а* рис. 3. В этом режиме плотность тока $j_{21}^{(a)}$, уходящего из электрода *2* в *1*, как легко видеть, будет равна

$$j_{21}^{(a)} = A_{21}^{(a)} T_2^2 \exp\left[-\frac{\varepsilon}{kT_2}\varphi_2(T_2)\right], \qquad (16а\,[21])$$

где $A_{21}^{(a)}$ — комбинированная термоэлектронная константа электрода 2 в режиме *а* рис. 3: $A_{21}^{(a)} = A_0 \overline{D_{21}^{(a)}}$, причем усреднение надо производить по $\nu_{T_2}(W_x')$ в тех же пределах, что и в $\overline{D_{12}^{(a)}}$. При $T_1 = T_2$, очевидно, $A_{12}^{(a)} = A_{21}^{(a)}$. В режиме *б* рис. 3 аналогично можно написать

$$j_{12}^{(б)} = A_{12}^{(б)} T_1^2 \exp\left[-\frac{\varepsilon}{kT_1}\varphi_1(T_1)\right], \qquad (16б\,[12])$$

$$j_{21}^{(б)} = A_{21}^{(б)} \gamma(T_2, \Delta V) T_2^2 \exp\left[-\frac{\varepsilon}{kT_2}\varphi_2(T_2)\right], \qquad (16б\,[21])$$

где $A_{12}^{(б)} = A_0 \overline{D_{12}^{(б)}}$ и $A_{21}^{(б)} = A_0 \overline{D_{21}^{(б)}}$, причем усреднение в $\overline{D_{12}^{(б)}}$ надо производить по $\nu_{T_1}(W_x')$, а в $\overline{D_{21}^{(б)}}$ по $\nu_{T_2}(W_x')$ в пределах $\infty < W_{x2}' < \varepsilon\Delta W$ и $\infty < W_{x1}' < 0$. При $T_1 = T_2$ и в этом случае $A_{12}^{(б)} = A_{21}^{(б)}$. При $T_1 \neq T_2$ комбинированные термоэлектронные константы двух электродов диода чисто теоретически могут отличаться друг от друга вследствие различия $\nu_{T_1}(W_x')$ и $\nu_{T_2}(W_x')$, по которым производятся усреднения.

Учтем теперь максвелловское распределение термоэлектронов по кинетическим энергиям W_x':

$$\nu'(W_x') = C \exp\left[-\frac{W_x'}{kT}\right]. \qquad (17)$$

При таком распределении (и только таком) $\gamma(T_1, \Delta V)$ по (15) имеет вид

$$\gamma(T_1, \Delta V) = \exp\left[-\frac{\varepsilon\Delta V}{kT}\right]. \qquad (18)$$

Известно, что для металла с $\varepsilon\varphi \gg kT$ (по Зоммерфельду) распределение электронов, которые могут выходить из эмиттера, т. е. с $W_x > W_a$, по величине W_x есть распределение максвелловское. Но тогда по (14) оно максвелловское и для любых эмиттеров. Распределение останется максвелловским для вышедших из эмиттера термоэлектронов по W_x' лишь в том случае, если коэффициент отражения не будет зависеть от W_x' (и следовательно W_x), т. е. при $D'(W_x') = D(W_x) = \text{const}$. Но в этом случае усреднения по разным распределениям $\nu'(W_x')$, например, соответствующим различным температурам T, и в различных пределах W_x' дают одно и то же значение $\overline{D}_i = D_i$. Но тогда все четыре комбинированные термоэлектронные константы равны друг другу:

$$A_{12}^{(a)} = A_{21}^{(a)} = A_{12}^{(б)} = A_{21}^{(б)} = \frac{D_1 D_2}{1 - R_1 R_2} = A_{1,2}^{*}. \qquad (19)$$

Мы будем называть $A_{1,2}^{*}$ комбинированной термоэлектронной константой диода. Заметим, что A_{12} равно A_{21} в данном диоде при всех температурах, но термоэлектронная константа диода не является универсальной и может иметь разные значения в диодах с различными катодами или анодами из-за различия в них D_1 и D_2. Учитывая (18) и (19), можно выражения для плотностей токов, идущих с любого из электродов в другой, записать в одинаковом виде:

$$j = A_{1,2}^{*} T^2 \exp\left[-\frac{\varepsilon}{kT}\Phi(T)\right], \qquad (20)$$

где T — температура эмиттирующего электрода; $\Phi(T)$ — его «действующая» работа выхода, равная истинной работе выхода $\varphi(T)$ в отсутствие поля, задерживающего эмиттированные электроны, и равная $[\varphi(T) + \Delta V]$ при наличии задерживающей разности потенциалов ΔV.

Теоретически, конечно, $D'(W_x)$ не может быть независимым от W'_x. Практически максвелловское распределение термоэлектронов свидетельствует лишь о достаточном постоянстве $D'(W'_x)$ для значений W'_x от нуля до нескольких kT. Можно было бы привести некоторые соображения, объясняющие практическую независимость D' от W'_x в указанной области, основывающиеся на учете сил электрического изображения у поверхности эмиттера (см., например, [2]). Можно было бы уточнять для разных случаев выражения A_{12} и A_{21} учетом хотя и слабой, но имеющей место зависимости $D'(W'_x)$. Такое уточнение выражений для A_{12} и A_{21}, однако, нерационально, во всяком случае для поликристаллических эмиттеров, так как наличие «пятен» с различной работой выхода приводит к бо́льшим отклонениям от рассмотренного выше идеализированного случая, чем пренебрежение зависимостью $D'(W'_x)$.

Зависимость $D'(W'_x)$ при больших значениях W'_x позволяет оправдать использование (3) при рассмотрении результатов измерений токов насыщения в плоских диодах. Строго говоря и в этом случае вместо D_1 следовало бы писать $\overline{D}_1 D_2^*/(1-\overline{R}_1\overline{R}_2^*)$, где $\overline{D}_2^*$ — средний коэффициент прохождения для анода и $\overline{R}_2^* = 1 - \overline{D}_2^*$. Но здесь усреднение следует производить не по W'_{x0}, с которыми термоэлектроны вылетают из катода, а по энергиям $W''_x = W'_{x0} + eV_0$, с которыми электроны приходят на анод. Так как $R(W'_x)$ уменьшается с ростом W'_x, то $\overline{R}_2^* \ll \overline{R}_1$ и с достаточной точностью $\overline{R}_2^*$ полагают равным нулю. В случае цилиндрической конструкции диода (катод — нить) из-за малой вероятности попадания термоэлектрона, отраженного от анода, снова на катод с еще бо́льшим основанием можно считать $\overline{R}_a^* = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Л. Рейман, Термоионная эмиссия, перев. с англ., ГИТТЛ, 1940, стр. 39–42.
2. Г. Бете, А. Зоммерфельд, Электронная теория металлов, перев. с нем. ОНТИ,, 1938, стр. 106—108.

Поступила в редакцию
21 III 1961

1961 № 12

ВЛИЯНИЕ ОТБОРА ТОКА ТЕРМОЭМИССИИ НА ТЕМПЕРАТУРНЫЙ РЕЖИМ РАБОТЫ ПОЛУПРОВОДНИКОВОГО КАТОДА

А. А. Остроухов

Рассмотрено охлаждение или разогрев катодного покрытия, вызванное отбором тока термоэмиссии. Использование известных из литературы значений теплопроводности и электропроводности оксидного покрытия показывает, что при мелкозернистом или крупнозернистом покрытии охлаждение за время $t \lesssim 10^{-4}$ *сек* значительно лишь при очень больших плотностях тока эмиссии и, очевидно, не имеет существенного значения в эффекте спада сравнительно малых импульсных токов в течение $t \lesssim 10^{-4}$ *сек*.

ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] отмечено, что для качественного объяснения наблюдаемых на опыте особенностей импульсной термоэмиссии можно привлечь различные физические гипотезы; изменение во времени степени покрытия поверхности катода атомами, влияющими на термоэмиссию (увеличение внешней работы выхода) [2, 3]; уменьшение концентрации объемных доноров в приповерхностной области покрытия (увеличение внутренней работы выхода) [4, 5, 6]; изменение величин объемного и поверхностного зарядов, экранирующих внешнее поле, в течение импульса анодного напряжения. Как показала оценка характеристических времен этих процессов [1], опирающаяся на известные из литературы [7, 8, 9] значения коэффициентов диффузии тяжелых частиц (атомов, вакансий, ионов) в оксиде, первые две гипотезы могут быть привлечены для количественного объяснения только медленно спадающей составляющей импульса тока. Последняя гипотеза, опирающаяся на факт существования на поверхности многих полупроводников поверхностных уровней с эффективным временем рекомбинации с носителями тока порядка 10^{-4}, 10^{-6} *сек*, позволяет объяснить наблюдаемые на опыте особенности спада импульса тока в течение времени порядка 10^{-4} *сек* [1, 10, 11]. Спад тока в этом случае имеет место при любых значениях отбираемого тока; пределы изменения тока в импульсе зависят от состояния поверхности, степени понизации объемных доноров и приложенного анодного напряжения. При этом оказалось, что изменение поверхностного заряда влияет на величину спада тока значительно сильнее, чем изменение заряда на объемных донорах.

В данной работе мы рассмотрим влияние на импульсную эмиссию охлаждения или разогрева покрытия при отборе тока. Экспериментально этот факт известен давно; приближенная теория его изложения в [12]. Нам представляется целесообразным еще раз остановиться на этом вопросе в связи с более новыми данными о сопротивлении оксидного покрытия при больших токах и его распределении по толщине слоя, а также новыми измерениями коэффициента теплопроводности оксидного слоя [13, 14, 15]. При этом мы математически более точно сформулируем задачу и приведем окончательные результаты к форме, удобной для сравнения с опытом.

Физическая картина охлаждения или разогрева катода током эмиссии такова. В момент начала отбора тока эмиссии $I(t)$ $(t = 0)$ с поверхности катода дополнительно к потоку энергии теплового излучения начинает уходить поток тепла $I(\chi + 2kT_0/e)$, где $e\chi$ — внешняя работа выхода

электронов из слоя; T_0 — температура свободной поверхности слоя. Слой полупроводника толщины порядка длины свободного пробега электрона l теперь постоянно обеднен быстрыми электронами, обладающими энергией, достаточной для выхода в вакуум; время выхода из рассматриваемого слоя $t \sim l/v \sim 10^{-12}$ *сек*, $\bar{v}$ — средняя тепловая скорость электронов. Остающиеся в этом слое медленные электроны за время порядка времени температурной релаксации электронного газа в объеме $t \lesssim 10^{-10}$*сек* вновь приходят в тепловое равновесие с решеткой и могут выйти в вакуум в виде обычных термоэлектронов. Если пренебречь столь малыми временами, то можно считать, что в каждый данный момент времени температура электронного газа и решетки равны друг другу (мы не учитываем разогрев электронного газа электрическим полем в слое). Таким образом, решетка практически безынерционно отдает свою тепловую энергию в вакуум при помощи электронного тока эмиссии. К остывающей поверхности изнутри катода подходит также дополнительный поток тепла, обусловленный разогревом толщи катода проходящим током. В зависимости от величины отбираемого тока в различные моменты времени температура поверхности слоя будет выше или ниже ее температуры в отсутствие тока эмиссии.

Рассматривая эффект охлаждения, мы будем пользоваться обычными уравнениями феноменологической теории полупроводников. Точное решение задачи в рамках этой теории, очевидно, весьма затруднительно, так как в исходные уравнения входят коэффициенты, являющиеся функциями температуры, причем эта зависимость от температуры не известна достаточно хорошо. Однако можно получить правильный порядок величины рассматриваемого эффекта, а также порядок величины его инерционности при таком подходе. Кроме того, феноменологический характер этих уравнений позволяет применить их к поликристаллическому пористому покрытию. При этом только нужно рассматривать коэффициенты в исходных уравнениях как некоторые эффективные параметры, характеризующие слой в среднем, и брать их из опытных данных. Влияние микрокристаллической структуры покрытия на рассматриваемый эффект мы обсудим подробнее в последнем параграфе.

При вычислении изменения температуры ΔT достаточно ограничиться малыми относительными значениями $\Delta T/T$. Действительно, так как внешняя работа выхода $\chi \sim 1$ *в*, $kT_0/e \sim 0{,}1$ *в*, то уже при $|\Delta T/T| \sim 0{,}1$ ток изменится примерно в e раз.

1. ВЕЛИЧИНА И ИНЕРЦИОННОСТЬ ЭФФЕКТА ОХЛАЖДЕНИЯ ИЛИ РАЗОГРЕВА ЭМИТТИРУЮЩЕГО СЛОЯ ТОКОМ ЭМИССИИ

Рассмотрим слой полупроводника толщины d, расположенный на металлической подложке; ось X направим внутрь слоя; тогда $x = 0$ соответствует свободной поверхности, $x = d$-границе с керном. Закон сохранения тепла в случае квазистационарных токов ($\operatorname{div} I = 0$) и однородного слоя приводит к следующему уравнению [16]

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div} \varkappa_0 \nabla T + \tau \vec{I} \nabla T + \frac{I^2}{\sigma}, \tag{1}$$

где ρ — плотность покрытия; c — удельная теплоемкость; $\varkappa_0$ — коэффициент теплопроводности; τ — коэффициент Томсона; σ — удельная электропроводность. В дальнейшем для упрощения расчетов эти коэффициенты, а также ток I будем считать постоянными. В этом случае (1) можно переписать так:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - b \frac{\partial T}{\partial x} = F, \tag{2}$$

где

$$a^2 = \frac{\varkappa_0}{\rho c}; \quad b = \frac{I\tau}{\rho c}; \quad F = \frac{I^2}{\rho c \sigma}. \tag{3}$$

На границе слоя с керном, в зависимости от условий теплообмена, можно фиксировать или поток тепла или температуру. Как показано в следующем параграфе, в интересующей нас области времен изменения температуры при значительном варьировании величин параметров температурный режим у границы с керном не имеет существенного значения для рассматриваемого эффекта. Для определенности мы зафиксируем температуру:

$$T(x, t)|_{x=d} = T_d = \text{const}. \tag{4}$$

На границе с вакуумом имеем

$$\varkappa_0 \frac{\partial T}{\partial x} + (\Pi + \zeta) I \Big|_{x=0} = r\sigma_0 T_0^4 + I\left(\chi + 2\frac{kT_0}{e}\right), \tag{5}$$

где Π — коэффициент Пельтье; ζ — химический потенциал электронов в слое; σ_0 — постоянная Стефана — Больцмана; r — эффективный коэффициент отражения; $e\chi$ — работа выхода электронов из слоя. Как известно [17],

$$\Pi + \zeta \approx \frac{kT}{e}(2 + n), \tag{6}$$

где n — показатель зависимости длины свободного пробега электрона l от энергии E: $l \sim E^n$. Учитывая это, а также то обстоятельство, что, как указывалось, можно ограничиться малыми $|\Delta T/T| \ll 1$, линеаризуем граничное условие (5), после чего оно принимает вид

$$\varkappa_0 \frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x=0} = k_0 + k_1 T_0, \tag{7}$$

$$k_0 = -3W + I\chi, \quad k_1 = \frac{1}{T_0^0}\left(4W - n\frac{kT_0^0}{e} I\right), \quad W = r\sigma_0 T_0^{04}, \tag{8}$$

где T_0^0 — температура поверхности слоя в отсутствие тока.

Начальное распределение температуры легко можно получить и оно имеет вид

$$T(x, t)|_{t=0} = T^0(x) = T_0^0 + \frac{W}{\varkappa_0} x. \tag{9}$$

Таким образом, приближенное решение задачи сводится к решению уравнения (2) с граничными и начальным условиями (4), (7), (9).

Решение ищем в виде

$$T(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x). \tag{10}$$

Стационарная часть $u_2(x)$ равна

$$u_2(x) = T_0^0 + \frac{W}{\varkappa_0} d + R\left(e^{-y\frac{x}{d}} - e^{-y}\right) + \frac{I^2 d^2}{\varkappa_0 \sigma y}\left(1 - \frac{x}{d}\right), \tag{11}$$

где

$$R = -[y + (1 - e^{-y})A]^{-1}\left\{\frac{d}{\varkappa_0}(I\chi - 3W) + \frac{I^2 d^2}{\varkappa_0 \sigma y} + A\left(T_0^0 + \frac{Wd}{\varkappa_0} + \frac{I^2 d^2}{\varkappa_0 \sigma y}\right)\right\}.$$

$$y = \frac{bd}{a^2} = \frac{I\tau d}{\varkappa_0}; \quad A = \frac{d}{\varkappa_0 T_0^0}\left(4W - n\frac{kT_0^0}{e} I\right). \tag{12}$$

Значение $u_2(x)$ при $x = 0$ равно

$$u_2(0) = T_0^0 + \left[\frac{1}{y}(1 - e^{-y})A + 1\right]^{-1}\left\{\frac{d}{\varkappa_0}\left[W - \left(W + I\chi - n\frac{kT_0^0}{e} I\right)\frac{1}{y}(1 - e^{-y})\right] + \frac{I^2 d^2}{\sigma\varkappa_0}\frac{1}{y}\left[1 - \frac{1}{y}(1 - e^{-y})\right]\right\}. \tag{13}$$

Нестационарная составляющая $u_1(x, t)$ выражается рядом

$$u_1(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m X_m(x)\, e^{-\frac{xy}{2d} - \left(\frac{y^2}{4} + v_m^2\right) z}, \qquad (14)$$

где

$$X_m(x) = \cos v_m \frac{x}{d} + \frac{H}{v_m} \sin v_m \frac{x}{d};\ z = \frac{a^2 t}{d^2},$$

а v_m положительные корни уравнения

$$\cos v_m + \frac{H}{v_m} \sin v_m = 0;\ H = A + \frac{y}{2}. \qquad (15)$$

По порядку величины при $H \lesssim 1$, $v_m \sim \frac{\pi}{2}(2m-1)$, $m = 1, 2, \ldots$ коэффициенты C_m равны

$$C_m = \frac{2v_m^2}{v_m^2 + H + H^2} \frac{1}{d} \int_0^d [T^0(x) - u_2(x)]\, e^{\frac{xy}{2d}} X_m(x)\, dx. \qquad (16)$$

Нестационарная часть решения $u_1(x, t)$ экспоненциально затухает во времени. Непосредственное вычисление коэффициентов C_m по формуле (16) показывает, что $|C_m| \sim 1/v_m^2$ при $m \to \infty$, поэтому ряд (14) сходится. При малых токах, когда $|y| = |I\tau d/\varkappa_0| \ll 1$, коэффициенты C_m равны

$$C_m = \frac{2}{v_m^2 + H + H^2} \left\{ \frac{Id}{\varkappa_0} \left(\chi - n \frac{kT_0^0}{e}\right) - \frac{I^2 d^2}{\varkappa_0 \sigma} \frac{1}{v_m} \left[\frac{H}{v_m} + \left(1 + \frac{H^2}{v_m^2}\right) \sin v_m \right] \right\}. \qquad (17)$$

Из (17) видно, что при достаточно малых токах, когда эффект охлаждения у поверхности преобладает над эффектом выделения джоулева и томсонова тепла в объеме, все C_m одного знака и зависимость $T(x, t)$ от времени представляет собой монотонно убывающую функцию t. При увеличении тока I несколько первых коэффициентов C_m могут оказаться разного знака, и зависимость $T(x, t)$ от t перестает быть монотонной. При определенных значениях $\varkappa_0$, σ это может осуществляться при $|y| \ll 1$, так что для C_m будет еще справедливо (17).

Рассмотрим теперь, как изменяется температура поверхности $x = 0$ при увеличении отбираемого тока I в случае достаточно длительных импульсов анодного напряжения. Из (13) при $|y| \ll 1$ получаем

$$\Delta T = T(0, \infty) - T_0^0 = \frac{Id}{\varkappa_0} \left[-\left(\chi - n \frac{kT_0^0}{e}\right) + \frac{Id}{2\sigma} \right] (1 + A)^{-1}. \qquad (18)$$

Если (18) справедливо для тока

$$I_0 = \frac{2\sigma}{d} \left(\chi - n \frac{kT_0^0}{e}\right), \qquad (19)$$

т. е. $|y| = |I_0 \tau d|/\varkappa_0 \ll 1$, то из (18) следует, что при токах $I < I_0$ поверхность слоя охлаждается в результате отбора тока эмиссии, а при $I > I_0$ — разогревается. Если можно пренебречь зависимостью A от I, т. е. $4W \gg n \frac{kT_0^0}{e} I$, то из (18) получаем, что максимальное охлаждение поверхности будет при токе $I_{\text{мин}} \approx I_0/2$, причем

$$\Delta T_{\text{мин}} \simeq -\frac{\sigma}{2\varkappa_0} \left(\chi - n \frac{kT_0^0}{e}\right)^2 (1 + A)^{-1}. \qquad (20)$$

Из (19) и (20) видно, что в рассматриваемом случае сравнительно алых токов ток $I_{\text{мин}}$, обеспечивающий максимальное охлаждение поерхности в новом стационарном состоянии, определяется в основном опротивлением покрытия d/σ, а величина охлаждения $\Delta T_{\text{мин}}$ — отношением $\sigma/\varkappa_0$. При дальнейшем увеличении тока, когда $|y| \sim 1$, на величиу $T(0, \infty)$ существенно влияет эффект Томсона. Однако случай $y| \sim 1$, вероятно, практически не реализуется, так как в широком нтервале значений параметров $\varkappa_0$, σ, τ соотношение $|y| \sim 1$ достигаетя при очень больших токах, которые согласно (18) вызывают сильный ерегрев поверхности и разрушение покрытия. Таким образом, в стаионарном режиме, когда отбираются сравнительно небольшие токи, лияние эффекта Томсона на температуру поверхности, вообще говоря, езначительно.

Рассмотрим поведение функции $T(x, t)$ при малых t, удовлетворяюих неравенству

$$z^{\frac{1}{2}} = \frac{a\sqrt{t}}{d} \ll 1. \tag{21}$$

Асимптотическое выражение для $T(x, t)$ при выполнении (21) удобее всего получить, решая операционным методом исходные уравнения 1), (2), (7), (9) и пренебрегая всеми членами, которые после обратного реобразования Лапласа будут содержать множители порядка $e^{-\frac{d^2}{a^2 t}}$.

В этом случае для температуры $T(x, t)$ получается следующее выажение

$$T(x, t) = T^0(x) + \frac{I^2 d^2}{\sigma\varkappa_0}\left(1 + \frac{\tau\sigma W}{\varkappa_0 I}\right)\left[\frac{a^2 t}{d^2} - e^{-\frac{xy}{2d}} f_2(x, t)\right] -$$

$$- \frac{Id}{\varkappa_0}\left(\chi - n\frac{kT_0^0}{e}\right) e^{-\frac{xy}{2d}} f_1(x, t), \tag{22}$$

де

$$f_1(x, t) = e^{-\frac{xy}{2d}}(2H + y)^{-1}\operatorname{erfc}\left[\frac{1}{2a}\left(\frac{x}{\sqrt{t}} - b\sqrt{t}\right)\right] +$$

$$+ e^{\frac{xy}{2d}}(2H - y)^{-1}\operatorname{erfc}\left[\frac{1}{2a}\left(\frac{x}{\sqrt{t}} + b\sqrt{t}\right)\right] - 4H(4H^2 - y^2)^{-1}\exp \times$$

$$\times\left[H\frac{x}{d} + \left(H^2 - \frac{y^2}{4}\right)\frac{a^2 t}{d^2}\right]\operatorname{erfc}\left[\frac{x}{2a\sqrt{t}} + H\frac{a\sqrt{t}}{d}\right]; \tag{23}$$

$$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-u^2} du; \quad H = A + \frac{y}{2}; \tag{24}$$

$$A = \frac{k_1 d}{\varkappa_0} = \frac{d}{\varkappa_0 T_0^0}\left(4W - n\frac{kT_0^0}{e} I\right); \quad y = \frac{bd}{a^2} = \frac{I\tau d}{\varkappa_0}.$$

Выражение для f_2 имеет аналогичную структуру; ввиду его громоздости мы его не приводим. Отметим только, что как f_1, так и f_2 изменяется фиксированной точке $x > 0$ от значений $f_1|_{t=0} = f_2|_{t=0} = 0$ до некоторой новой стационарной величины за время, определяемое примерно словиями

$$\frac{1}{2a}\left(\frac{x}{\sqrt{t}} \pm b\sqrt{t}\right) \sim 1; \quad \frac{x}{2a\sqrt{t}} + H\frac{a\sqrt{t}}{d} \sim 1. \tag{25}$$

Таким образом, волна охлаждения, вызванная началом отбора тока в момент $t = 0$ и распространяющаяся от поверхности $x = 0$ в глубь слоя, вызывает существенное изменение температуры в точке $x > 0$ в момент времени t, определяемый условиями (25).

Температура поверхности $x = 0$ при выполнении (21) равна

$$\Delta T' = T(0, t) - T_0^0 = -\frac{Id}{\varkappa_0}\left(\chi - n\frac{kT_0^0}{e}\right)\left(\frac{a\sqrt{t}}{d}\right)\frac{2}{\sqrt{\pi_1}} + \\ + \frac{I^2 d^2}{\varkappa_0 \sigma}(1 + B)\left(\frac{a\sqrt{t}}{d}\right)^2 + \ldots, \tag{26}$$

$$B = \left(I\frac{d}{\sigma}\right)^{-1}\left[H\left(\chi - n\frac{kT_0^0}{e}\right) + \frac{Wd}{\varkappa_0}\tau\right]. \tag{27}$$

Отсюда находим положение минимума $t_{\text{мин}}$ на кривой $T(0, t)$:

$$t_{\text{мин}} = \frac{\rho c d^2}{\pi \varkappa_0}\left(I\frac{d}{\sigma}\right)^{-2}\left(\chi - n\frac{kT_0^0}{e}\right)^2 (1 + B)^{-2}. \tag{28}$$

При этом для $t_{\text{мин}}$ должно выполняться неравенство (21). Глубина минимума равна

$$\Delta T'_{\text{мин}} = T(0, t_{\text{мин}}) - T_0^0 = -\frac{\sigma}{\pi \varkappa_0}\left(\chi - n\frac{kT_0^0}{e}\right)^2 (1 + B)^{-1}. \tag{29}$$

Из (27) и (29) следует, что явная зависимость $\Delta T'_{\text{мин}}$ от тока I, вообще говоря, незначительна. Коэффициент Томсона τ входит в (26), (27), (29) через B и H; влияние тепла Томсона в случае малых t на величины $\Delta T'_{\text{мин}}$ и $t_{\text{мин}}$ также незначительно. Легко проверить далее, что ΔT обращается в ноль при $t \simeq 4t_{\text{мин}}$, т. е. уже через время $t \gtrsim 4t_{\text{мин}}$ после начала отбора тока температура поверхности $x = 0$ становится больше T_0^0.

Сравним теперь $\Delta T_{\text{мин}}$ из (20) и $\Delta T'_{\text{мин}}$ из (29). Выражение (20) получено при условии $|I_0 \tau d/\varkappa_0| \ll 1$, где $I_0 = \frac{2\sigma}{d}\left(\chi - n\frac{kT_0^0}{e}\right)$; выражение (29) — при условии (21) для $t_{\text{мин}}$. Из (28) следует, что $t_{\text{мин}}$ тем меньше, чем меньше I_0 и чем больше I. Поэтому возможно, что для одного и того же слоя при $t \to \infty$ и малых токах $I \sim I_0$ будет справедливо выражение (20) и при $t \to 0$ и больших токах I — справедливы выражения (28), (29) (нужно учитывать также, что другие параметры слоя могут изменяться с ростом I).

Из (20) и (29) получаем, что $\Delta T'_{\text{мин}}/\Delta T_{\text{мин}} \sim \sigma'/\sigma$, где проводимость для больших токов мы обозначили через σ'. Таким образом, отбор очень больших импульсных токов приводит к охлаждению поверхности в течение времени $t \sim t_{\text{мин}}$; величина же этого охлаждения может быть того же порядка, что и максимально возможное охлаждение при стационарном отборе сравнительно малых токов, если проводимость σ не сильно изменяется с изменением I.

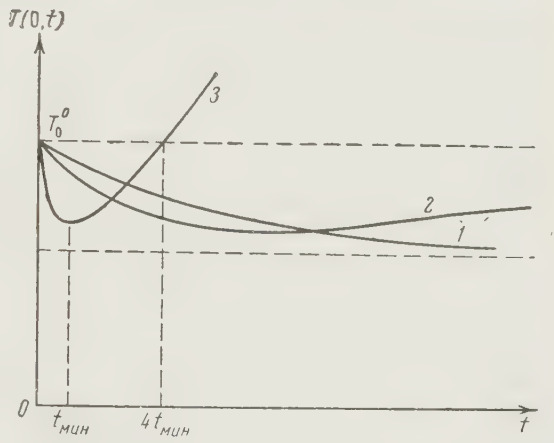
Используя (28) и (29), находим зависимость между $t_{\text{мин}}$ и $\Delta T'_{\text{мин}}$

$$t_{\text{мин}} = -\Delta T'_{\text{мин}}\frac{\rho c d}{I^2 \frac{d}{\sigma}(1 + B)}. \tag{30}$$

Из полученных выше выражений (13), (14), (18), (22), (26) для $T(x, t)$ при $|y| \ll 1$ следует качественный ход зависимости температуры свободной поверхности $T(0, t)$ от времени, изображенный на рисунке. В области значений тока $0 \leqslant I \lesssim I_0/2$ $T(0, t)$ монотонно убывает с

этом t; максимальное охлаждение имеет место при $I \sim I_0/2$ (кривая 1). При $I_0/2 \lesssim I \lesssim I_0$ получаем кривую 2; при $I \gg I_0$, когда положение минимума отодвигается в сторону малых t, поверхность после кратковременного охлаждения начинает сильно разогреваться (кривая 3).

При решении уравнения (2) мы считали коэффициенты a^2, b, F постоянными. Если принять используемые ниже порядки величин параметров, то согласно (20), (28), (29) величина и инерционность эффекта охлаждения будут определяться в основном параметрами σ, $\varkappa_0$, χ, pc. Эти параметры сами зависят от температуры и, следовательно, должны изменяться при охлаждении поверхности, причем наиболее резко изменяются при $|\Delta T|/T \ll 1$ лишь I, σ.



Уменьшение σ при охлаждении согласно (20), (29) должно приводить к уменьшению самого эффекта охлаждения. Так как обычно опыт дает рост отношения I/σ с увеличением температуры, то понижением температуры согласно (28) $t_{мин}$ отодвигается в сторону больших t, и эффект охлаждения за время $t \lesssim 10^{-4}$ *сек* будет уменьшаться. Таким образом, учет зависимости коэффициентов a^2, b, F от температуры в уравнении (2) не приведет, по-видимому, к увеличению эффекта охлаждения.

2. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ И СРАВНЕНИЕ С ОПЫТОМ

Отметим прежде всего следующее. Уменьшение температуры приповерхностного слоя покрытия сказывается на величине эмиссионной способности катода двояко. Во-первых, ток с поверхности катода I' (ток I', вообще, не равен сквозному току I) изменяется за счет изменения концентрации носителей тока в этой области; для существенного изменения концентрации нужно, чтобы охлаждение распространилось на глубину порядка длины экранирования; этот процесс будет длиться время $t \gtrsim t_{рек}, t_{расп}$, где $t_{рек}$ — время установления рекомбинационного равновесия между зоной проводимости и объемными донорами; $t_{расп}$ — время распространения волны охлаждения на глубину порядка длины экранирования. Во-вторых, ток I' изменяется за счет изменения средней кинетической энергии электронов; для этого нужно, чтобы охлаждение распространилось на область толщины порядка длины l_T, на которой устанавливается температурное равновесие между носителями и решеткой. Длина l_T, вообще говоря, меньше длины экранирования, и длительность этого процесса, очевидно, будет меньше времен $t_{рек}$, $t_{расп}$. Исходные феноменологические уравнения не в состоянии учесть изменения температуры на расстояниях меньших или порядка l_T. Поэтому нужно считать, что температура в области $0 \lesssim x \lesssim l_T$ есть $T(0, t)$. Таким образом, изменение тока с поверхности катода I' во времени при таком рассмотрении определяется зависимостью температуры поверхности $T(0, t)$ от времени t. Изменение же сквозного тока I со временем будет при этом существенно зависеть от величины приложенного анодного напряжения U_a. Если U_a достаточно мало, так что отбор тока I производится в режиме пространственного заряда в вакууме, то измене-

ние тока I со временем будет мало до тех пор, пока ток с поверхности $I'(t) > I(t)$ и, следовательно, концентрация электронов у поверхности катода в вакууме не очень сильно отличается от своего равновесного значения. Как отмечено в [10], аналогичное малое изменение тока I при работе катода в режиме пространственного заряда имеет место и при механизме спада тока, рассматриваемом в [1,10]. При больших U_a, когда все эмиттируемые электроны увлекаются к аноду, $I' = I$ и зависимость тока от времени определяется изменением температуры поверхности $T(0, t)$ в течение импульса U_a, т. е. будет зависеть от величины параметров слоя $\varkappa_0$, σ, а также самого тока I. Ниже при оценках мы ограничимся рассмотрением только этого случая больших напряжений U_a.

Пренебрежем пока поликристаллической структурой покрытия и возьмем параметры $\varkappa_0$, σ, τ и др., характеризующие слой в среднем. Пусть $d = 10^{-2}$ *см*, $\chi = 1$ *в*, $kT_0^0/e = 0{,}1$ *в*, $T_0^0 = 1160°$ K, $W = r\sigma_0 T_0^{04} = 2{,}8$ *вт/см*^{2} так как $r = 0{,}25 - 0{,}30$ [18], $\rho c = 2$ *дж/см*$^3 \cdot$*град* [18, 12], $n = 1$. Как и для большинства полупроводников, для оксидного покрытия $T\tau = T^2 \frac{\partial \alpha}{\partial T} \approx T\alpha \simeq 0{,}1$ в [19] при $T \approx 1000°$ K; α — удельная термоэдс.

Для величины $\varkappa_0$ имеется большой разброс данных [18, 15]: $\varkappa_0 = 10^{-3} - 5 \cdot 10^{-5}$ *вт/см*$\cdot$*град*, причем последнее значение наиболее вероятно, так как получено непосредственным измерением при помощи термозондов [15].

При взятых значениях $\varkappa_0 z^{\frac{1}{2}} = a\sqrt{t}/d \simeq (2 - 0{,}5)\sqrt{t}$. Мы ограничимся рассмотрением временны́х изменений величин, происходящих за $t \lesssim t_0 = 10^{-4}$ *сек*. Для таких значений t хорошо выполняется неравенство (21): $z^{1/2} \ll 1$. Установление нового стационарного состояния, как видно из (14), происходит за время $t \sim d^2/a^2$, которое в данном случае значительно больше t_0. Таким образом, волна охлаждения, идущая от поверхности внутрь слоя, за время $t \lesssim t_0$ успевает распространиться на расстояние $x_0 \ll d$. Отсюда следует, что в рассматриваемом эффекте существенны лишь значения параметров для приповерхностных слоев покрытия, а также что граничные условия для температуры у керна не играют существенной роли. Последнее можно также легко проследить, рассматривая асимптотическое поведение лапласовского изображения температуры $T(x, s)$.

Сопротивление покрытия в широком интервале значений тока $0 \lesssim I \lesssim 50$ *а/см*^{2} было измерено в [13]; для внутренних слоев было найдено $d/\sigma \simeq 1$ *ом*$\cdot$*см*^{2}. В [14] непосредственное измерение показало (при сравнительно небольших токах), что приповерхностные слои покрытия имеют большее сопротивление, чем внутренние. Кроме того, известно, что приповерхностный слой (толщины $\sim 10^{-4}$ *см*) смешанного покрытия обогащен окисью стронция, сопротивление которой значительно больше, чем сопротивление окиси бария [13, 20]. Таким образом, нам представляется более реальным принять для сопротивления поверхностных слоев $d/\sigma \simeq 1$ *ом*$\cdot$*см*^{2}, а не $d/\sigma = 0{,}01$ *ом*$\cdot$*см*^{2}, принятое в [12].

Таким образом, при выбранных значениях параметров, используя (19) и (20), получаем для $\varkappa_0 = 10^{-3}$ *вт/см*$\cdot$*град* $A \sim 10^{-1}$, $y \sim 10^{-3} I$ (*а/см*^{2}) $I_0 \sim 2$ *а/см*^{2}, $\Delta T_{\text{мин}} \sim -4°$ K; при $\varkappa_0 = 5 \cdot 10^{-5}$ *вт/см*$\cdot$*град* $A \sim 2$, $y \sim 2 \cdot 10^{-2} I$ (*а/см*^{2}), $I_0 \sim 2$*а/см*^{2}, $\Delta T_{\text{мин}} \sim -30°$ K. В обоих случаях максимальное охлаждение имеет место при сравнительно малых стационарных токах I_0.

Из этой оценки видно, что отбор достаточно длительных импульсов ($t_{\text{имп}} \gtrsim d^2/a^2$) сравнительно небольших токов может вызвать значительное охлаждение поверхности и, таким образом, привести к уменьшению самого отбираемого тока.

Рассмотрим выражения (28) и (29) для $\Delta t_{\text{мин}}$ и $\Delta T'_{\text{мин}}$, полученные при решении нестационарных уравнений. Как было отмечено, для рассматриваемых времен в широком интервале значений $\varkappa_0$ выполняется неравенство (21) и можно пользоваться разложением (26). При $\varkappa_0 = 10^{-3}$ *вт/см·град* имеем $t_{\text{мин}} \sim 5 \cdot 10^{-2} I^{-2}$ *(а/см²) сек*, $\Delta T'_{\text{мин}} \sim -3°$ К; при $\varkappa_0 = 5{,}10^{-5}$ *вт/см·град* получаем $t_{\text{мин}} \sim I^{-2}$ *(а/см²) сек*, $\Delta T'_{\text{мин}} = -60°$ К; для выполнения $\frac{a\sqrt{t_{\text{мин}}}}{d} \leqslant 1$ при этом нужно, чтобы $I \geqslant 1$ *а/см²*. Таким образом, при первом значении $\varkappa_0$ $t_{\text{мин}} \lesssim t_0$ при $I \gtrsim 30$ *а/см²*, однако величина $\Delta T'_{\text{мин}}$ мала. При втором значении $\varkappa_0$ малые $t_{\text{мин}}$ и большие $\Delta T'_{\text{мин}}$ могут быть одновременно лишь при больших токах; при малых I положение $t_{\text{мин}}$ отодвигается в сторону больших t и величина эффекта охлаждения за $t \lesssim t_0$ становится малой. Из (30) при $\Delta T'_{\text{мин}} = -100°$ К, $t_{\text{мин}} = 10^{-4}$ *сек* получаем $I = 140$ *а/см²*.

Таким образом, для поликристаллического покрытия со средними значениями параметров $\varkappa_0 \approx 5 \cdot 10^{-5}$ *вт/см·град* и $d/\sigma \simeq 1$ *ом·см²* для приповерхностных слоев эффект охлаждения за время $t \lesssim 10^{-4}$ *сек* значителен лишь при очень больших токах ($I \gtrsim 100$ *а/см²*). Этот результат получен в [12] при $\varkappa_0$, большем в 10 раз из-за несколько произвольного занижения сопротивления d/σ.

В литературе иногда приводятся значения $\varkappa_0$, которые меньше использованного нами значения [15]. При таких малых значениях $\varkappa_0$ из (25) находим, что за $t \simeq 10^{-4}$ *сек* охлаждение распространяется на глубину $x_0 \lesssim 10^{-4}$ *см*, т. е. практически меньшую или равную размерам микрокристалликов. Отсюда следует, что в полученные выражения нельзя подставлять значения параметров, характеризующих покрытие в среднем, которые определяются в опытах по измерению $\varkappa_0$, σ. В случае крупнозернистого покрытия, очевидно, более близко к действительности оценивать порядок величины и инерционности эффекта, рассматривая охлаждение монокристаллического слоя толщины d. Если для монокристалла окиси бария T ρc, d, χ, τ имеют прежние значения, а для $\varkappa_0$, $1/\sigma$ принять значения $\varkappa_0 \simeq 10^{-3}$ *вт/см·град* и $1/\sigma \simeq 0{,}5$ *ом·см* [21], то мы получим следующие значения величин: глубина проникновения охлаждения за $t \leqslant t_0$, $x_0 \approx 4 \cdot 10^{-4}$ *см*, $A \ll 1$, $|y| \leqslant 1$ при $I \lesssim 100$ *а/см²*; стационарный ток, обеспечивающий максимальное охлаждение, $I_{\text{мин}} = \frac{1}{2} I_0 \simeq 45$ *а/см²*; $\Delta T_{\text{мин}} \simeq -200°$ К. При нестационарном отборе тока $t_{\text{мин}}$ отодвигается теперь в сторону больших t и при $t \lesssim t_0$, $I \lesssim 100$ *а/см²* из (26) имеем $\Delta T' \simeq -20\, I\,(а/см^2) \sqrt{t\,(сек)}$ °К, т. е. эффект мал даже при больших токах. Если взять в этом случае $\varkappa_0 \simeq 10^{-4}$ *вт/см·град*, то $x_0 \lesssim 2 \cdot 10^{-4}$ *см*, $\Delta T' \simeq -70\, I\,(а/см^2) \sqrt{t\,(сек)}$ °К и эффект будет значительным лишь при токах $I \gtrsim 100$ *а/см²*. Из нашего сопоставления теоретических и экспериментальных данных можно сделать следующий вывод. Как в случае мелкокристаллического покрытия, обладающего малыми тепло- и электропроводностью $\varkappa_0$ и σ, так и в случае крупнозернистого покрытия, обладающего большими значениями $\varkappa_0$ и σ отдельных зерен, эффект охлаждения за время $t \lesssim 10^{-4}$ *сек* значителен лишь при больших токах ($I \gtrsim 100$ *а/см²*) и, очевидно, не играет существенной роли при наблюдаемом спаде сравнительно малых токов [2, 3]. Учет неоднородности эмиттирующей поверхности вряд ли изменит этот результат, так как для этого нужно, чтобы отношение эффективной эмиттирующей поверхности к поверхности катода было порядка 10^{-2}, что маловероятно.

Для окончательного выяснения вопроса о влиянии эффекта охлаждения слоя при отборе тока на импульсную эмиссию нужно одновременно знать параметры покрытия $\varkappa_0$, σ, I. Покрытие должно быть или очень мелкокристаллическим или крупнозернистым, чтобы его можно было рассматривать

при помощи усредненных параметров $\varkappa_0$ и σ, или параметров, относящихся к отдельному зерну. При этом интересны опыты с достаточно большими и длительными импульсами тока, при которых можно было бы наблюдать разогрев покрытия в течение импульса и, таким образом, оценить величины $\Delta T'_{\text{мин}}$ и $t_{\text{мин}}$.

В заключение выражаю благодарность К. Б. Толпыго за советы и интерес к работе и П. М. Дыкману за полезные замечания, сделанные при ознакомлении с полученными здесь результатами.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Остроухов, К. Б. Толпыго, Сб. статей Физика твердого тела, II, Изд. АН СССР, 1959, стр. 215.
2. R. L. Sproull, Phys. Rev., 1945, **67**, 5, 166.
3. С. Г. Калашников, Г. А. Кубецкий, В. Н. Ошер, ЖТФ, 1946, **16**, 12, 1369.
4. L. S. Nergaard, RCA Rev., 1952, **13**, 4, 464 (см. сб. Оксидный катод, под ред. Л. Н. Добрецова, ГЭИ, 1957, стр. 5).
5. Сб. Оксидный катод, под ред. Б. М. Царева, ИЛ, 1957, стр. 211.
6. G. A. Haas, J. Appl. Phys., 1957, **28**, 4, 1486.
7. R. W. Redington, Phys. Rev., 1952, **87**, 1066.
8. R. S. Bever, J. Appl. Phys., 1953 **24**, 8, 1008.
9. R. L. Sproull, R. S. Bever, G. Libovitz, Phys. Rev., 1953, **92**, 77.
10. А. А. Остроухов, Сб. статей Физика твердого тела, **II**, Изд. АН СССР, 1959, стр. 224.
11. А. А. Остроухов. Физика твердого тела, 1961, **3**, 1, 3.
12. С. В. Птицын, Физические явления в оксидном катоде, ГИТТЛ, 1949.
13. W. E. Danforth, D. L. Goldwater, J. Appl. Phys., 1949, **20**, 2, 163
14. Я. П. Зингерман, Тр. ИФ АН УССР, 1952, вып. 2, стр. 57.
15. Я. П. Зингерман, Укр. фіз. ж., 1956, **1**, 3, 308.
16. А. Зоммерфельд, Термодинамика и статистическая физика, перев. с нем., ИЛ, 1955, стр. 193.
17. К. Б. Толпыго, Тр. ИФ АН УССР, 1952, вып. 3, стр. 52.
18. Г. Герман, С. Вагенер, Оксидный катод, ГТИ, 1949.
19. П. А. Зельцман, Н. Д. Моргулис, В. С. Яговдик, ЖТФ, 1951, **21**, 9, 1035.
20. A. Eisenstein, J. Appl. Phys., 1946, **17**, 8, 654.
21. R. T. Dolloff, J. Appl. Phys., 1956, **27**, 1418.

Поступила в редакцию
30 I 1961

1961 № 12

ФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЦЕЗИЕВОЙ ПЛАЗМЫ ТЕРМОЭЛЕКТРОННОГО ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ ЭНЕРГИИ

Н. Д. Моргулис, Ю. П. Корчевой

Приведены результаты экспериментального исследования физических свойств плазмы в парах цезия, возникающей при работе термоэлектронного преобразователя тепловой энергии в электрическую [4]. Показано, что подобный преобразователь может работать в двух, существенно разных, режимах: «квазивакуумном» — при низких давлениях и «дуговом» — при повышенных давлениях паров цезия. Свойства плазмы и все ее параметры (распределение потенциала и приэлектродные его скачки, температура и концентрация электронов и т. п.) оказываются при этом заметно разными. В частности, в первом случае плазма является преимущественно термической, а во втором — преимущественно газоразрядной. Показано наличие прямого соответствия между выходным напряжением преобразователя и изменением контактной разности потенциалов между его электродами и т. д. Все эти данные позволяют сделать ряд интересных выводов о природе и роли явлений в плазме подобных преобразователей.

ВВЕДЕНИЕ

Проблема непосредственного и высокоэффективного преобразования тепловой энергии в электрическую приобретает в настоящее время большое народнохозяйственное значение [1]. Из различных методов подобного преобразования большой физический интерес и перспективы практического применения имеет термоэлектронный метод, общие принципы которого описаны в обзорах [2]. Наиболее распространенный в настоящее время термоэлектронный преобразователь энергии представляет собой вакуумный двухэлектродный электронный прибор, наполненный парами цезия при низком давлении. Роль этих паров сводится к нейтрализации электронного пространственного заряда получаемыми на катоде термоионами цезия и созданию контактной разности потенциалов, ускоряющей электроны. Однако наличие паров цезия внутри прибора может привести к возникновению цезиевой плазмы, т. е. газообразного полупроводника; последнее, в свою очередь, может оказать существенное влияние на характеристики его работы. В настоящее время нет полной ясности о механизме работы термоэлектронного преобразователя и роли возникающей в нем цезиевой плазмы. Так, например, некоторые исследователи [3], подчеркивая преобладающую роль последней, даже назвали этот прибор «плазменной термопарой», хотя есть серьезные основания полагать, что основную роль в работе такого преобразователя играют электродные явления, т. е. термоэлектронная эмиссия его катода и контактная разность потенциалов между его электродами.

В связи с этим возникает необходимость детального исследования физических свойств цезиевой плазмы в реальных условиях работы прибора. В этом плане нами была начата соответствующая работа, предварительные результаты которой опубликованы в [4]. Приведенные там данные позволили сделать, предварительно, ряд новых интересных физических выводов относительно свойств и роли явлений в цезиевой плазме термоэлектронного преобразователя. В настоящее время необходимые измерения в определенной степени уже завершены и их результаты приведены в настоящей статье.

1. МЕТОДИКА ИССЛЕДОВАНИЯ

Исследование рассматриваемого здесь вопроса было выполнено при помощи изображенных схематически на рис. 1 экспериментальных вакуумных ламп, наполненных парами цезия. Эти лампы имели: катод *1*, состоявший из W-ленточки, покрытой слоем бикарбида тория ThC_2, и анод *2*, сделанный из Та (покрытый во время опытов пленкой Cs). Последний имел как охранные кольца (для измерения параметров преобразователя только со средней неохлажденной части катода), так и не показанный на рис. 1 радиатор для улучшения его охлаждения; межэлектродное расстояние равнялось 5 *мм*. Использование ThC_2 катода обеспечивало получение хорошей электронной эмиссии и мощности преобразования в средней, порядка 2000° К, области температур [5].

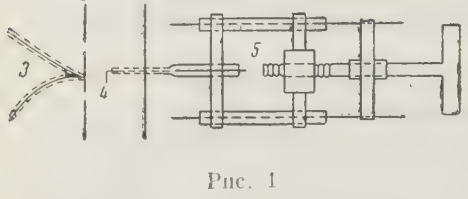


Рис. 1

Температура катода определялась при помощи оптического микропирометра, а температура анода — W — Pt-термопарой *3*; подводы последней были скрыты в кварцевых трубочках. В межэлектродное пространство был введен зонд *4*, состоявший из W-проволочки диаметром 0,1 *мм* и длиной $\sim 1-1{,}5$ *мм*; подвод зонда был скрыт в двойной кварцевой оболочке, предотвращавшей поверхностные утечки. Зонд крепился на салазках *5*, скрепленных с обоймой на винтовой нарезке, позволявшей перемещать его вдоль расстояния катод — анод и тем самым определять параметры исследуемой плазмы в различных точках межэлектродного пространства. Для устранения искажающих влияний электрического и магнитного полей тока накала катода питание последнего производилось при помощи известной схемы использования переменного тока с выпрямителем [6]. Все измерения в цепях лампы и зонда производились осциллографически только в тот полупериод, когда ток накала катода был заперт выпрямителем. Во избежание перегрева зонда проходящим в его цепи электронным током, в цепь был включен специальный коммутатор, снижавший среднее значение этого тока примерно в 10 раз. Все измерения производились в четырех режимах работы термоэлектронного преобразователя энергии: 1) короткого замыкания, 2) выделения на внешнем сопротивлении заметной мощности преобразователя, 3) выделения максимальной мощности преобразования и 4) режиме, близком к эдс. Кроме того, эти измерения были произведены в широком диапазоне значений давления p или температуры насыщения t паров цезия в лампах.

Типичный пример семейства зондовых характеристик, полученных нами в подобных условиях, приведен на рис. 2,*а* для случая сравнительно низких значений $t = 120°$ С ($p = 2 \cdot 10^{-3}$ *мм* рт. ст.) и на рис. 2,*б* для повышенных значений $t = 210°$ С ($p = 0{,}1$ *мм* рт. ст.) при одном определенном положении зонда. По оси ординат отложены значения $\lg I_з + C$. Цифры на кривых указывают приведенную выше последовательность исследованных режимов работы. Все основные, и в том числе приведенные на рис. 2 зондовые характеристики сняты относительно анода преобразователя; для определения потенциала катода (см. ниже), подобные же характеристики снимались дополнительно и относительно этого электрода. Все эти характеристики имеют совершенно нормальный вид, позволяющий определить при их помощи распределение потенциала в пространстве преобразователя, концентрации и температуры электронов, что нами и было сделано.

Важным обстоятельством для подобных измерений является постоянство контактной разности потенциалов $\Delta U'_к$ между зондом и анодом преобразователя. Можно думать, что и в этом нас убеждают полученные

ниже данные, что в нашем случае практически почти всегда имело место условие $\Delta U'_к \simeq 0$, поскольку как анод, так и зонд должны быть покрыты пленкой цезия с близкими степенями покрытия. Все же для проверки этого обстоятельства была сделана специальная лампа, повторившая конструкцию предыдущей; однако описанный выше зонд был заменен в ней точечной W — Pt-термопарой, позволявшей определять его температуру в прикатодной и прианодной областях работавшего преобразователя с учетом

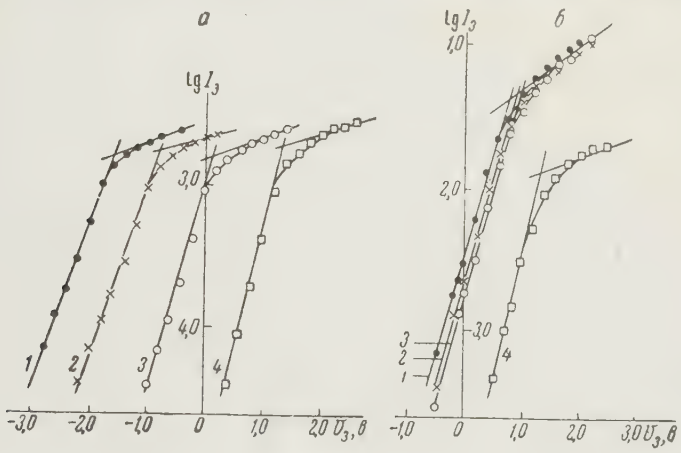


Рис. 2

нагрева зонда электронным током в его цепи. Пользуясь приведенными в [7] данными, можно было отсюда судить о возможности наличия на зонде пленки цезия, так как на аноде, судя по его температуре, она всегда существовала. Эти опыты вместе с данными зондовых измерений на всем протяжении катод — анод приводят нас к заключению о том, что даже в самом опасном случае наиболее низкой температуры $t = 120°$ С величина $\Delta U'_к$ была практически постоянной, и, вероятно, близкой к нулю.

В дополнительном случае зондовых измерений относительно катода значение $\Delta U''_к$ между последним и наиболее холодным зондом принималось $\approx$1,6 *в* (см. ниже). Наконец, укажем, что заметно повышенное, против случая нормального преобразователя (где $d \leqslant 1$ *мм*), межэлектродное расстояние $d = 5$ *мм* было необходимо для получения кривых распределения параметров плазмы в этом пространстве. Хотя это обстоятельство привело к некоторому понижению выходной мощности термоэлектронного преобразователя, однако полученные здесь значения параметров плазмы должны иметь свое обычное значение, как это, например, частично видно из их сравнения с [4].

2. РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗМЕРЕНИЙ

Представленные на рис. 2 зондовые характеристики были сняты нами в широком диапазоне значений температуры 100—250° С и при четырех указанных выше режимах работы преобразователя. Рассматривая эти характеристики, обратимся прежде всего в одному из наиболее интересных вопросов — распределению потенциала в межэлектродном пространстве. Подобные кривые $U = f(x)$ для приведенных на рис. 2 двух наиболее типичных случаев $t = 120$ и 210° С представлены на рис. 3 и 4; нумерация кривых соответствует указанным выше режимам работы преобразователя (*1* — короткое замыкание и т. д.). Данным рис. 3 соответствует ток короткого замыкания $I_0 = 2{,}2$ *а/см*^{2} и оптимальные выходные мощность и напряжение $W_m = 3{,}2$ *вт/см*^{2} и $U_m = 1{,}6$ *в*; соответственно данным рис. 4 —

значения $I_0 = 10\ a/см^2$, $W_m = 2{,}7\ вт/см^2$ и $t_m = 0{,}5\ в$. Кроме того, на рис. 3 и 4 пунктирными кривыми представлены данные для $t = 140$ и 200° С, полученные с другой лампой. Все эти данные полностью подтверждают выводы, приведенные в [4], на основании гораздо более ограниченного материала, а именно: существуют два заведомо разных и приемлемых практически режима работы термоэлектронного преобразователя — при низких температурах — квазивакуумный и при повышенных — дуговой. Первый

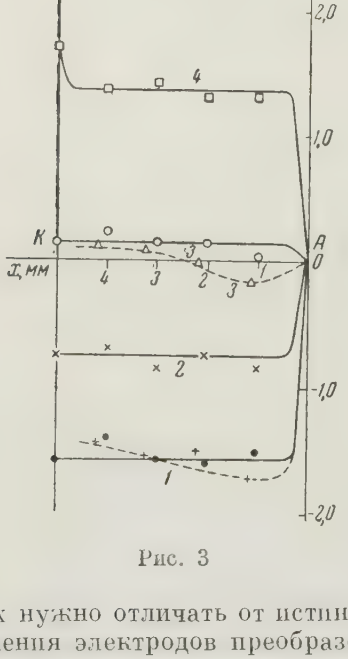


Рис. 3

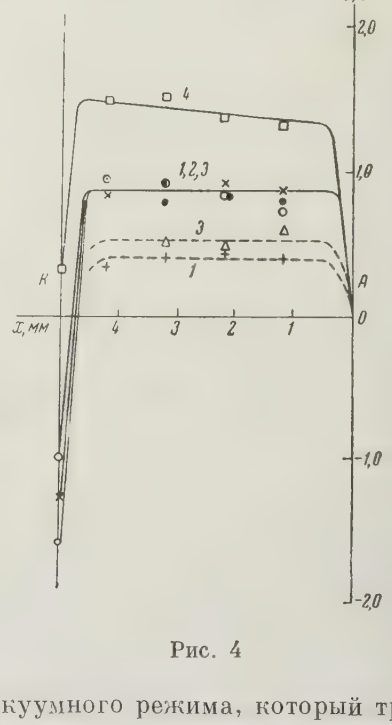


Рис. 4

из них нужно отличать от истинно вакуумного режима, который требует сближения электродов преобразователя до очень малых расстояний [2]. Вместе с тем все эти кривые распределения потенциала из рис. 3 и 4 ясно показывают, что в обоих случаях в межэлектродном пространстве преобразователя находится плазма с ее типичным ходом распределения потенциала и следующим отсюда равенством концентраций электронов и ионов. Однако характер этой плазмы и местоположение граничащих с ней приэлектродных скачков потенциала оказываются в двух крайних случаях существенно различными.

В первом — квазивакуумном — режиме, определенный на основании [8] газокинетический пробег электрона λ_e оказывается значительно больше межэлектродного расстояния d, т. е. $\lambda_e \gg d$. Получаемая в этом случае плазма примыкает непосредственно к катоду и отделена от анода скачком потенциала U_a. В режиме короткого замыкания величина U_a близка к значению контактной разности потенциалов $\Delta U_к$ между электродами преобразователя; в нашем случае при работах выхода электрона из катода $\varphi_к = 3{,}2\ эв$ и из анода $\varphi_a = 1{,}6 - 1{,}8\ эв$ мы должны получить $\Delta U_к = 1{,}4—1{,}6\ в$.

По мере перехода от режима короткого замыкания к режимам с внешней нагрузкой и, наконец, к эдс величина U_a постепенно уменьшается, проходит через нуль (примерно в режиме оптимальной мощности) и затем меняет свой знак. Кстати, кривая *1* на рис. 3, как того и следовало ожидать, весьма близка по характеру как к полученной экспериментально в [9], так и к кривой *III* на рис. 61 из [10], однако для случаев наличия анодного напряжения. Электроны и ионы в межэлектродном пространстве получены

в основном термическим путем на поверхности катода; такая плазма, естественно, почти не светится. Хотя в этом случае имеет место условие $\lambda_e \gg d$, здесь, как и во многих других аналогичных случаях, происходит сильное объемное взаимодействие электронов и ионов специфической природы [11]; последнее и приводит к несомненному возникновению в этом пространстве типичной плазмы со всеми ее характерными особенностями.

Во втором — дуговом — режиме имеет место обратное соотношение, т. е. $\lambda_e \ll d$. Получаемая в этом случае плазма отделена от катода значительным скачком потенциала $U_к$; от анода же ее отделяет небольшой отрицательный, т. е. тормозящий электроны плазмы, скачок потенциала $U_а$. В случае короткого замыкания, где проходящий ток весьма близок к насыщению, первая величина относительно плазмы должна быть равна $U_к \simeq (\Delta U_к + U_а)$, т. е. $U_к \gtrsim 2$ *в*.

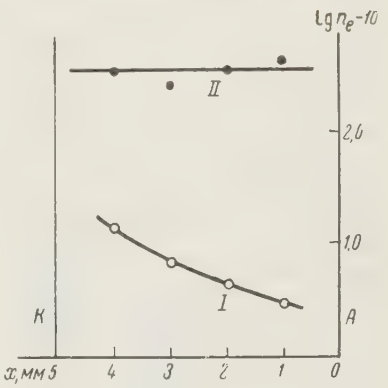


Рис. 5

По мере перехода от режима короткого замыкания к режиму с внешней нагрузкой распределение потенциала в плазме остается неизменным; однако при этом происходит соответствующее уменьшение катодного скачка потенциала. При работе термоэлектронного преобразователя в этих условиях наблюдается интенсивное свечение его плазмы. Все это убеждает нас в том, что этот режим работы весьма близок к случаю обычного низковольтного дугового разряда с накаленным катодом в газе при пониженном давлении; потенциал горения подобного разряда может быть даже ниже потенциала возбуждения атомов газа (см. кривую *II* на рис. 61 из [10]). Подобный разряд в парах цезия был подробно исследован нами в прошлом [12]; ниже приведены дополнительные доводы в пользу этой аналогии. Получаемая плазма имеет и в этом случае несомненно смешанный характер (в меньшей мере термический и в большей — газоразрядный), ибо скачок потенциала в межэлектродном пространстве $\sim U_к$ может в этом случае заметно превышать потенциал возбуждения атомов цезия, равный 1,5 *в*. Благодаря этому, а также и большой плотности электронного тока, имеются все условия для заметного возбуждения и ступенчатой ионизации атомов цезия.

Параллельно данным рис. 3 и 4 на рис. 5 приведено распределение в межэлектродном пространстве электронной концентрации в логарифмическом масштабе для режима короткого замыкания для случаев $t = 120°$ С (кривая *I*) и 210° С (кривая *II*). Здесь обнаруживается не только естественная в этих случаях разница, в абсолютных значениях этой величины n_e, но и существенная разница в характере ее распределения в пространстве. Если при дуговом режиме имеют место свойственное этому случаю приблизительное постоянство n_e [12], то в квазивакуумном режиме имеет место четко выраженный градиент этой величины. Последний связан очевидно, с возникновением электронов и ионов в основном только на поверхности катода и их последующей диффузией оттуда в остальное пространство.

Существенное изменение при переходе от квазивакуумного к дуговому режиму испытывают все параметры плазмы и термоэлектронного преобразователя в целом. Это видно из рис. 6, где представлены зависимости от температуры насыщения паров цезия t следующих величин: логарифма концентрации электронов n_e (*I*), потенциала плазмы относительно анода $U_{па}$ (*II*) и температуры электронов T_e (*III*), соответствующих режиму короткого замыкания с током I_0 (*IV*), а также оптимальной мощности преобразования W_m (*V*). Область перехода от первого

режима ко второму находится примерно у 140° С, чему соответствует $p \simeq 5 \cdot 10^{-3}$ *мм* рт. ст. и $\lambda_e \simeq 2$ *мм* (при энергии электрона ~ 1 в [8]) т. е. при $\lambda_e \simeq d$. Интересно отметить, что при подобном переходе к дуговому режиму преобразования происходит, в частности, уменьшение величины T_e и рост величины n_e до значений, типичных для случая низковольтного дугового разряда в парах цезия [12]. Переход в этих условиях от режима короткого замыкания к режиму оптимальной мощности этих значений T_e и n_e существенно не изменяется.

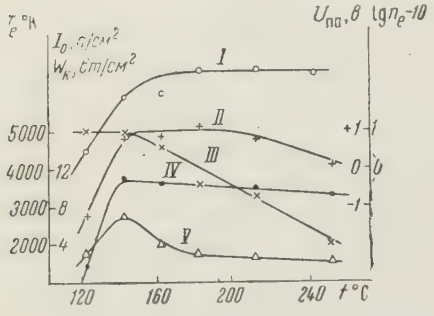


Рис. 6

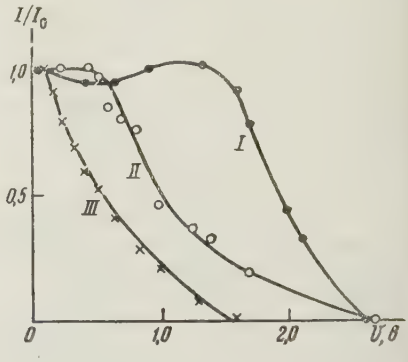


Рис. 7

Мы не приводим численных значений этих величин для разных случаев, поскольку они опубликованы в [4]. Наконец, существенная роль подобного перехода от квазисвободного к диффузионному [13] режиму движения электронов видна также на рис. 7. На нем представлены характеристики задержки электронного тока для 120° С ($\lambda_e > d$) — кривая *I*; 140° С ($\lambda_e \simeq d$) — кривая *II* и 210° С ($\lambda_e \ll d$) — кривая *III*. Здесь ясно видна постепенная и понятная деформация этих характеристик [7]; для получения (при $I_0 = \text{const}$) возможно большего выходного напряжения и мощности преобразователя. Как можно видеть, лучше всего подходит квазивакуумная характеристика *I*.

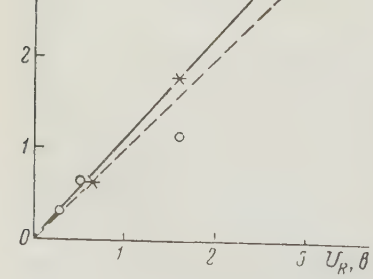


Рис. 8

Как известно [2], эффективная работа термоэлектронного преобразователя связана в основном с использованием контактной разности потенциалов между его электродами $\Delta U_к$. Убедительное доказательство правильности этого вытекает из сопоставления параллельного сдвига зондовых характеристик $\Delta U_з$, определяющего изменение величины $\Delta U_к$, и измеренного одновременно на внешнем сопротивлении выходного напряжения преобразователя U_R. В связи со специфичным (см. рис. 3 и 4) распределением потенциала легко понять, что для выяснения этого вопроса подобные зондовые характеристики для 120° С следует снимать относительно анода, а для 210° С — относительно катода преобразователя; результат подобных измерений представлен на рис. 8, где звездочки относятся к 120° С, а кружки — к 210° С. Полученные точки (кроме одной) хорошо укладываются на прямой, почти совпадающей в проведенной под углом в 45° пунктирной прямой, т. е. действительно $\Delta U_з = U_R$. Это обстоятельство несомненно свидетельствует в пользу того, что выходное напряжение

преобразователя получается за счет использования контактной разности потенциалов между его электродами, как это и следует из «электродных» представлений о работе этого прибора [2].

В связи со сказанным выше относительно дугового режима работы преобразователя, интересно сравнить его непосредственно с обычным низковольтным дуговым разрядом с накаленным катодом в парах цезия при примерно одинаковых условиях опыта. С этой целью на рис. 9 приведены графики распределения потенциала для случаев термоэлектронного

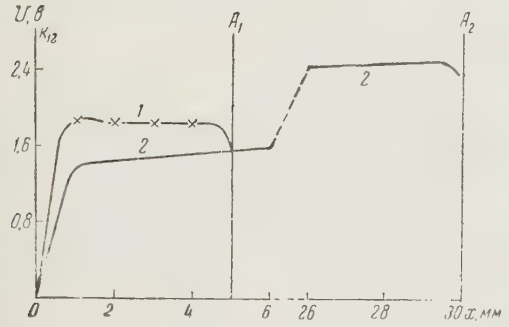


Рис. 9

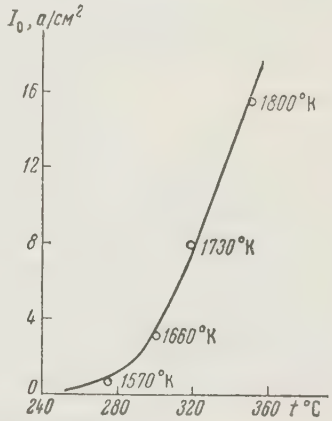


Рис. 10

преобразователя в режиме короткого замыкания (*1*) и подобного дугового разряда (*2*), по данным [12] в одинаковых условиях $I_0 = 4$ *а/см*² (на катоде) и $t = 250°$ С; межэлектродное расстояние было при этом разным $d_1 = 5$ *мм* и $d_2 = 30$ *мм*. Мы видим, что обе эти кривые (приэлектродные области которых представлены здесь схематически) по своему характеру весьма близки друг к другу. Более того, значения параметров получаемой в этих случаях плазмы также весьма близки друг к другу, а именно: в первом случае $n_e \simeq 5 \cdot 10^{12}$ *см*$^{-3}$, $T_e \simeq 2600°$ К, $U_к = 1{,}8$ *в* и $U_a = -0{,}4$ *в*, а во втором случае $n_e \simeq 7 \cdot 10^{12}$ *см*$^{-3}$, $T_e \simeq 2600°$ К, $U_к = 1{,}3$ *в* и $U_a = -0{,}3$ *в*; только градиенты потенциала в плазме оказываются несколько разными.

Таким образом, все это является дополнительным серьезным доводом в пользу указанной выше близкой аналогии между термоэлектронным преобразователем в дуговом режиме работы и обычным низковольтным дуговым разрядом в парах цезия.

Из рассмотрения рис. 7 и 9 можно также сделать некоторые дополнительные к приведенному в [8] выводы относительно эффективного поперечного рассеяния $Q = 1/\lambda$ медленных электронов атомами цезия. По мере повышения давления паров цезия p квазивакуумная кривая задержки *I* рис. 7 переходит постепенно в кривую *II*, характеризующую, очевидно, однократное рассеяние электронов и, наконец, в предельную кривую *III*, характеризующую многократное рассеяние. Сравнение кривых *I* и *II* позволяет оценить порядок величины Q; так, например, для электронов с «тепловыми» ($T_e \simeq 300°$ К) скоростями мы получаем $Q_1 \simeq 40$ *см*$^{-1}$ (при $p = 1$ *мм* рт. ст.).

С другой стороны, эту же величину можно оценить и из кривой *2* рис. 9 на основании получаемого отсюда значения проводимости плазмы $\sigma = I/E$ и подвижности электронов в ней

$$\mu = \sigma / e n_e \simeq \frac{e}{mv} Q^{-1};$$

в этом случае для электронов плазмы с $T_e = 2600°$ К мы получаем $Q_1 \simeq 100\,см^{-1}$. Оба указанные значения Q относятся к рассеянию электронов атомами цезия, потому что относительная концентрация ионов цезия в обоих случаях весьма мала (порядка 10^{-3}); эти значения Q являются весьма приближенными и требуют несомненно серьезного уточнения.

В свете изложенного выше относительного дугового режима работы термоэлектронного преобразователя становится понятной обнаруженная у нас и в [14] возможность получения очень больших плотностей эмиссии I_0 для металло-цезиевых катодов в режиме короткого замыкания без использования дополнительного понизатора [7]. На рис. 10 представлены зависимости оптимальной величины I_0 от t для случая Та-катода при расстоянии $d = 0{,}3\,мм$. Каждая точка кривой соответствует динамическому равновесию катода с парами цезия в максимуме зависимости $I_0 = f(T_1)$ при $t = \text{const}$. Мы наблюдаем сильный рост величины I_0, достигающей 15,5 $а/см^2$ при 350° С ($p = 6$ *мм* рт. ст.) и $T_к = 1800°$ К. Всем точкам кривой на рис. 10 соответствуют примерно одинаковое состояние катода и, на основании формулы Ричардсона (считая весь ток чисто электронным), одинаковые значения работы выхода электрона $\varphi_к \simeq 2{,}8$ *эв* при постоянной $A \simeq 320\ а/см^2 \cdot град^2$. Таким образом, здесь должна существовать заметная межэлектродная контактная разность потенциалов, достаточная для поддержания мощного низковольтного дугового разряда в парах цезия, при указанных значениях величин I_0, p и d.

3. НЕКОТОРЫЕ ВЫВОДЫ И ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Это обстоятельство может наложить определенные ограничения как на методы, так и на рассмотрение результатов исследования явлений в подобной, несколько необычной плазме; последнюю, в частности, можно рассматривать как газообразный полупроводник [15]. Следует помнить, что природа плазмы термоэлектронного преобразователя будет иметь разный характер, в зависимости от соотношения между величинами λ_e и d. В силу этой причины явления в плазме преобразователя при двух указанных режимах могут иметь заметно разный характер и поэтому требовать раздельного рассмотрения.

Итак, при работе термоэлектронного преобразователя, наполненного парами цезия, независимо от величины давления паров в его межэлектродном пространстве возникает типичная плазма. Она характеризуется известными условиями: $dU/dx = E \simeq \text{const}$, т. е. $n_e \simeq n_p$, затем $x_D \ll d$ и $\tau_л \ll \tau$; здесь $x_D = \sqrt{\dfrac{kT_e}{8\pi e^2 n_e}} \approx 10^{-4}\,см$ — длина экранирования; $\tau_{.1} = \sqrt{\dfrac{\pi m}{e^2 n_e}} \simeq 10^{-10}\,сек$ — период Ленгмюровских колебаний; τ — длительность возможных нестабильностей (колебаний) нашей плазмы. Легко показать, что во всех описанных случаях эти условия имеют место. Однако в противоположность обычной плазме вследствие больших плотностей тока I, текущего через преобразователь, как правило имеет место необычное неравенство $I \gtrsim j_M$, где $j_M = en_e\sqrt{kT_e/2\pi m}$ — плотность неупорядоченного тока в плазме.

Определяя давление паров цезия p_0', при котором ($\lambda_e \simeq d$) происходит переход из квазивакуумного в дуговой режим ($p_0' = A/\lambda_e \simeq A/d$), следует помнить, что им одновременно определяется и переходная плотность электронного тока короткого замыкания преобразователя I_0'. В самом деле, условие динамического равновесия поверхности накаленного катода с окружающей его атмосферой атомов и термоионов цезия [16], имеющих концентрации n_a и n_p, в условиях короткого замыкания прибора типа преобразователя в квазивакуумном режиме, можно

(для плоскопараллельной системы) представить так:

$$\alpha n_a \sqrt{\frac{kT_0}{2\pi M}} = n_p \left[\sqrt{\frac{kT_к}{2\pi M}} \left(\beta + e^{-\frac{eU_a}{kT_к}} \right) + \gamma n_e d \right]. \qquad (1)$$

Здесь α и β — коэффициенты понизации атомов и нейтрализации ионов на поверхности катода, накаленного до температуры $T_к$; $T_0 = (t + 273^\circ)$; U_a — прианодный скачок потенциала; γ — коэффициент объемной рекомбинации. В нашем случае, на основании [17] последний член уравнения (1) очень мал. Отсюда, необходимое для нейтрализации электронного пространственного заряда тока I_e, т. е. для $n_p = n_e = I_e / eu_e$, предельное (при $U_a \ll kT_к / e$) давление паров цезия в указанном режиме будет равно

$$p_0 = \frac{(1+\beta)}{e\alpha} I_e \sqrt{2\pi m k T_0}. \qquad (2)$$

Так, например, при $I_0 = 20\,a/см^2$ и $T_0 = 500^\circ$ К в случае $\alpha = 0{,}05$ и $\beta = 0{,}95$ (чему приблизительно соответствует катод на ThC_2 [5]) мы получим $p_0 \simeq 2 \cdot 10^{-2}$ *мм* рт. ст., т. е. $t \simeq 170^\circ$ С ($\lambda_e \ll d$); в случае $\alpha = 0{,}95$ и $\beta = 0{,}05$ (приблизительно катод из Та) мы получим $p_0 \simeq 1 \cdot 10^{-3}$ *мм* рт. ст., т. е. $t \simeq 115^\circ$ С ($\lambda_e \gg d$). С другой стороны, зная значение p_0' из выражения $p_0' \simeq A/d$, мы для предельного случая перехода из квазивакуумного режима в дуговой определим на основании (2) величину I_0' и т. д.; все это вполне удовлетворительно соответствует данным опыта.

В развитие изложенного в [3, 7, 13] можно, используя полученные в настоящей работе экспериментальные данные, рассчитать в максвелловском приближении приэлектродные скачки потенциала преобразователя в режиме эдс (кривые *4* на рис. 3 и 4), т. е. при токе $I = 0$. В этих условиях можно ожидать наличия двух приэлектродных скачков потенциала — U'_a у анода и $U'_к$ у катода. Поведение холодного анода в этом случае эквивалентно поведению изолированного ($\Sigma I = 0$) зонда в плазме, у поверхности которого образуется скачок потенциала, тормозящий электроны плазмы,

$$U_a' = \frac{kT_e}{e} \ln \frac{u_e}{u_p} = \frac{kT_e}{e} \ln \sqrt{\frac{T_e}{T_p} \frac{M}{m}}. \qquad (3)$$

С другой стороны, прикатодный скачок потенциала также определяется из условия $\Sigma I = 0$; так как в обоих случаях $t = 120$ и 210° С ток насыщения катода I_0 больше суммы неупорядоченного тока в плазме j_M и термоионного тока I_p, то этот скачок потенциала будет тормозить катодный ток; он равен

$$U_к' = \frac{kT_к}{e} \ln \frac{I_0}{(j_M + I_p)}. \qquad (4)$$

Подобным путем мы получим при $t = 120^\circ$ С значения $U'_к = 0{,}8$ *в* и $U'_a = 1{,}4$ *в* при $t = 210^\circ$ С значения $U'_к = 0{,}3$ *в* и $U'_a = 1{,}6$ *в*. Сравнение этих данных с экспериментальными кривыми *4* на рис. 3 и 4 указывает на их удовлетворительное качественное соответствие, кроме одного случая — прикатодного скачка при 210° С, который почему-то имеет обратный ожидаемому знак.

В другом крайнем случае короткого замыкания (кривые *1* на рис. 3 и 4) мы наблюдаем возникновение больших скачков потенциала — прианодного U_a в квазивакуумном и прикатодного $U_к$ в дуговом режимах. Очевидно, что оба скачка потенциала вызваны сосредоточением

возле этих электродов избыточного пространственного заряда соответствующего знака, т. е. в этом случае возможно применение закона «трех вторых»:

$$I = I_e = \frac{1}{9\pi}\sqrt{2\frac{e}{m}}\frac{U_a^{3/2}}{x_a^2}; \quad I_p = \frac{1}{9\pi}\sqrt{2\frac{e}{M}}\frac{U_к^{3/2}}{x_к^2}. \tag{5}$$

Здесь I_e и I_p — плотности электронного и ионного токов у анода и катода; x_a и $x_к$ — толщина зоны их пространственного заряда. Так, например, по данным рис. 3 для $t = 120°$ С, $I_e = 2{,}2\ a/см^2$ и $U_a = 1{,}6\ в$ мы получим $x_a \simeq 1\cdot10^{-3}\ см$ и $E_a \simeq U_a/x_a \simeq 10^3\ в/см$; по данным рис. 4 для $t = 210°$ С, считая $I_p = I_e\sqrt{m/M}$, где $I_e = 10\ a/см^2$ и $U_к = (\Delta U_к + U_a) = 2{,}3\ в$, мы получим примерно те же значения $x_к$ и $E_к$. Однако в последнем случае дугового режима преобразователя следует помнить о том, что ионная составляющая тока в дуге может иметь разное значение в зависимости от обстоятельств, и ее определение представляет порой немалые трудности [12].

Большой интерес представляет то обстоятельство, что аналогично случаю низковольтного дугового разряда [10], в дуговом режиме работы термоэлектронного преобразователя прианодной скачок потенциала U_a имеет знак, препятствующий дрейфу электронов из плазмы к аноду. Подобный дрейф электронов против электрического поля может происходить только диффузионным путем; для этого необходимо наличие достаточного градиента концентрации электронов n_e, соответствующего (в максвелловском приближении) условию

$$D_e\frac{\Delta n_e}{\Delta x} > n_e\mu_e E \quad \text{или} \quad \frac{\Delta n_e}{n_e} > \frac{\mu_e}{D_e}E\Delta x \simeq \frac{eU_a}{kT_e}, \tag{6}$$

где μ_e и D_e — подвижность и коэффициент диффузии электронов; E — напряженность электрического поля. Это означает, что в нашем случае $T_e \simeq 3300°$ К и концентрации электронов в средней области плазмы $n_e \simeq 4\cdot10^{12}\ см^{-3}$; у самой поверхности анода последняя величина должна быть равна $n_e' \simeq 1\cdot10^{12}\ см^{-3}$. Однако последняя цифра приводит нас к плотности неупорядоченного тока $j_M \simeq 2a/см^2$, которая почему-то заметно меньше тока в цепи преобразователя $I_0 \simeq 10\ a/см^2$.

Наконец, приведенные в [4] и здесь данные относительно концентрации и температуры электронов в плазме позволяют вычислить значение коэффициента зеебековской термоэдс [3] для разных режимов работы термоэлектронного преобразователя. Нам думается, что нет необходимости приводить эти значения и сравнивать их с данными опыта, так как против подобного «плазменного» представления о работе преобразователя говорят, например, такие серьезные факты, как: 1) отсутствие соответствия между приэлектродной температурой электронов и температурами горячего катода и более холодного анода (см. выше и [4]); 2) практическая независимость эдс термоэлектронного преобразователя от давления паров цезия в широком интервале $t = 25 - 250°$ С [7]; 3) наличие соответствия между выходным напряжением преобразователя и изменением межэлектродной контактной разности потенциалов (см. рис. 8). Все это явно свидетельствует в пользу «электродной» (см. выше), а не плазменной природы принципа работы преобразователя, хотя явления в плазме могут накладывать серьезный отпечаток [13] на его особенности. Последнее, как это видно из рис. 7, может, например, сказаться на внутреннем сопротивлении и, следовательно, на выходных параметрах преобразователя; напряжении и мощности, а значит и кпд. Таким образом, явления в плазме термоэлектронного преобразователя должны, очевидно, иметь вторичный, а не определяющий принцип его работы — первичный характер.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Моргулис, Вестн. АН СССР, 1961, **31**, 9, 25.
2. Н. Моргулис, Успехи физ. наук, 1960, **70**, 679; Л. Добрецов, ЖТФ, 1960, **30**, 365.
3. H. Lewis, J. Reitz, J. Appl. Phys., 1959, **30**, 1439, 1838; G. Grover, Nucleonics, 1959, 7, 54; W. Ranken, G. Grover, E. Salmi, J. Appl. Phys., 1960, **31**, 2140.
4. Н. Моргулис, Ю. Корчевой, Докл. АН СССР, 1961, **136**, 336.
5. Н. Моргулис, Ю. Корчевой, Атомная энергия, 1960, **9**, 49.
6. П. Марчук, Тр. ИФ АН УССР, 1956, 7, 3.
7. П. Марчук, Тр. ИФ АН УССР, 1956, 7, 17; Н. Моргулис, Ю. Корчевой, Ю. Чутов, ЖТФ, 1961, **31**, 845.
8. R. Brode, Phys. Rev., 1929, **34**, 673.
9. С. Птицын, И. Цуккерман, Сб., посвященный 70-летию акад. А. Ф. Иоффе, Изд. АН СССР, 1950, стр. 173.
10. M. Druyvesteyn, F. Penning, Rev. Mod. Phys., 1940, **12**, 148.
11. В. Грановский, Электрический ток в газе, **1**, ГИТТЛ, 1952, стр. 244.
12. Н. Моргулис, П. Марчук, Укр. физ. ж., 1956, **1**, 59.
13. Б. Мойжес, Г. Пикус, Физика твердого тела, 1960, **2**, 756.
14. R. Hirsch, J. Appl. Phys., 1960, **31**, 2064.
15. А. Иоффе, Полупроводниковые термоэлементы, Изд. АН СССР, 1960, стр. 160.
16. Н. Моргулис, ЖЭТФ, 1946, **16**, 489.
17. F. Mohler, J. Res. Nat. Bur. Standards, 1937, **19**, 447.

Киевский государственный
университет
им. Т. Г. Шевченко

Поступила в редакцию
27 V 1961

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

1961 № 12

КОМПЕНСАЦИЯ ИОННОГО ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЗАРЯДА ЭЛЕКТРОНАМИ

В. П. Игнатенко, А. С. Мясников

Рассмотрен процесс распространения одномерного ионного потока, пространственный заряд которого компенсируется вводом электронов в некотором сечении потока.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время все большее применение находят длинные потоки заряженных частиц с большой плотностью тока. Характерная особенность таких потоков — взаимодействие заряженных частиц, составляющих поток, что ограничивает возможное значение плотности тока и длины потока [1]. Получение длинных интенсивных потоков заряженных частиц возможно, если силы пространственного заряда потока компенсированы вводом в него частиц с противоположным зарядом. Необходимые для такой компенсации частицы можно получить либо за счет остаточных газов, всегда присутствующих в вакуумной системе [2], либо путем введения в поток частиц обратного знака.

Целью описываемой работы являлось изучение совместного движения одномерных потоков разноименно заряженных частиц при различных начальных условиях, когда электроны вводятся в некотором сечении ионного потока и увлекаются в него силами пространственного заряда ионов.

Все исследования проводились при следующих предположениях: 1) движение электронно-ионного потока считалось установившимся во внешних стационарных электростатических полях; 2) наличием остаточных газов в вакуумной системе и связанными с ними процессами перезарядки ионов пренебрегалось; 3) не учитывались процессы рекомбинации заряженных частиц в потоке; 4) в случае применения сетчатых электродов пренебрегалось потерями тока на них, а электрическое поле считалось неизменяющимся в плоскости сеток; 5) все начальные скорости заряженных частиц считались одинаковыми.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

На рис. 1 приведена схема расположения электродов, необходимых для создания электронно-ионного потока. Ионный ток, ограниченный собственным пространственным зарядом у анода, создается разностью потенциалов $V_{\text{п}}$. За счет энергии, полученной в ускоряющем промежутке d, ионный поток достигает эмиттера электронов, имеющего вид сетки, при потенциале $0 \leqslant V_0 \leqslant V_{\text{п}}$, а затем распространяется в дрейфовом пространстве за эмиттером электронов. Межэлектродный промежуток l может быть выбран таким, что потенциал от пространственного заряда ионов будет больше потенциала эмиттера электронов V_0. Под действием разности потенциалов $V_m - V_0$ электроны будут втягиваться в ионный поток, уменьшая пространственный заряд ионов. Если $V_0 > 0$, то электронный ток становится циркуляционным, т. е. электроны совершают колебательное движение около максимума потенциала V_m в пространстве (x_1, l). При некоторых условиях электроны могут увлекаться ионным потоком и в дрейфовое пространство за эмиттером электронов.

Однако промежуток l может быть столь большим, что не все ионы достигнут источника электронов, а частично возвратятся в ускоряющий промежуток d. Таким образом, задачу получения длинного электронно-

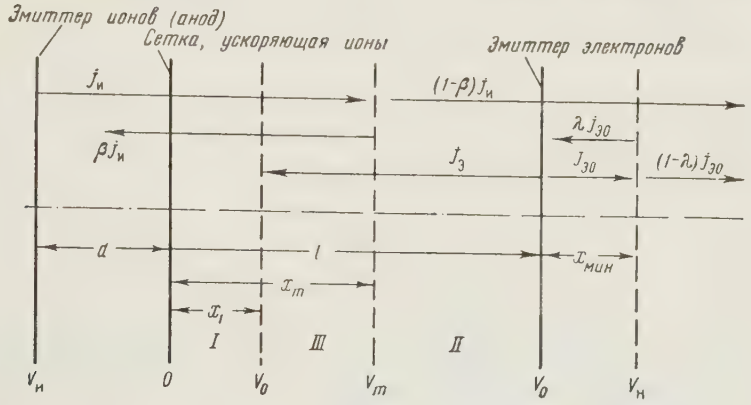


Рис. 1. Схема расположения электродов для получения электронно-ионного потока. Область *III* существует только в случае если $\beta > 0$ ($V_m = V_и$); λ соответствует доли отраженного электронного тока $j_{э0}$ от виртуального катода

ионного потока можно разбить на две: 1) задачу доведения ионного потока до эмиттера электронов (внутренняя задача); 2) задачу распространения электронно-ионного потока за эмиттером электронов (внешняя задача).

2. ВНУТРЕННЯЯ ЗАДАЧА

Распределение потенциала в пространстве, занятом электронно-ионным потоком, находится, как известно [1], из решения следующей системы уравнений:

$$\nabla^2 V = -4\pi(\rho_и - \rho_э), \tag{1}$$

$$\operatorname{div}\vec{j}_э = \operatorname{div}\vec{j}_и = 0,$$

$$\vec{j}_э = \rho_э\vec{v}_э, \quad \vec{j}_и = \rho_и\vec{v}_и, \tag{1'}$$

$$v_э^2 = 2\eta_э(V - V_0),$$
$$v_и^2 = 2\eta_и(V_и - V), \tag{1''}$$

где ρ — плотность заряда; η — удельный заряд частицы; v — скорость частицы; $\vec{j}$ — вектор плотности тока. Индексы $_э$ и $_и$ относятся соответственно к электронам и ионам.

Запись уравнения неразрывности в виде двух отдельных членов оказалась возможной только при нашем предположении об отсутствии процессов рекомбинации частиц в системе.

В одномерном случае систему уравнений (1) можно преобразовать к одному уравнению

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{4\pi j_и}{\sqrt{2\eta_и}}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{V - V_0}} - \frac{1}{\sqrt{V_и - V}}\right), \tag{2}$$

где $\alpha = \frac{j_э}{j_и}\sqrt{\frac{m}{M}}$; m и M — соответственно масса электрона и иона.

В нашей постановке задачи с одномерным электронно-ионным потоком величина α будет, очевидно, постоянной.

Уравнение (2) удобнее представить в безразмерных координатах, введя для этого следующие обозначения:

$$\frac{V}{V_и} = \varphi, \quad \frac{V_0}{V_и} = \varphi_0, \quad \frac{x}{l} = \xi.$$

Тогда

$$\frac{d^2\varphi}{d\xi^2} = A\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\varphi - \varphi_0}} - \frac{1}{\sqrt{1-\varphi}}\right), \tag{3}$$

где

$$A = \frac{4\pi j_и l^2}{\sqrt{2\eta_и V_и^3}}. \tag{4}$$

Если потерь ионного тока на элементах системы нет и процессы рекомбинации частиц отсутствуют, то в случае полного ограничения ионного тока пространственным зарядам ($E = 0$ у поверхности источника ионов) величина плотности ионного тока в системе находится из «закона трех вторых» [1]:

$$j_и = \frac{\sqrt{2\eta_и} V_и^{3/2}}{9\pi d^2}, \tag{5}$$

где d — величина ускоряющего промежутка. Подставляя в выражение (4) значение $j_и$ из (5), найдем

$$A = \frac{4}{9}\sigma^2, \tag{6}$$

где $\sigma = l/d$.

Решение уравнения (3) в области I, где электронный ток отсутствует ($\alpha = 0$), легко получить двойным интегрированием:

$$\sigma(\xi_1 - \xi) = (2c_1 + \sqrt{1-\varphi})\sqrt{\sqrt{1-\varphi} - c_1} - \\ - (2c_1 + \sqrt{1-\varphi_0})\sqrt{\sqrt{1-\varphi_0} - c_1}, \tag{7}$$

где ξ_1 — положение точки поворота электронов в межэлектродном промежутке; c_1 — постоянная интегрирования. В области II решение уравнения (3) имеет вид

$$\pm\sigma(\xi_m - \xi) = I(\varphi_m, \varphi_0), \tag{8}$$

где

$$I(\varphi_m, \varphi_0) = \frac{1}{(1+\alpha^2)^2}\{(1-\alpha^2)(2c_2 + \sqrt{1-\varphi_0}) + \\ + 2\alpha^2\sqrt{(1-\varphi_0)(\sqrt{1-\varphi_0} - c_2)}\} + \frac{\sqrt{2}\,\alpha(1-\varphi_0)^{1/4}}{2(1+\alpha^2)^{7/4}}\{8c_2[E(\gamma, k) + \mathbf{E}(k)] - \\ - (4c_2 + \sqrt{(1-\varphi_0)(1+\alpha^2)})[F(\gamma, k) + \mathbf{K}(k)]\}, \tag{9}$$

причем

$$k^2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{c_2}{\sqrt{(1-\varphi_0)(1+\alpha^2)}}\right);$$

$$\sin^2\gamma = \frac{\sqrt{(1-\varphi_0)(1+\alpha^2)} - \sqrt{1-\varphi_0}}{\sqrt{(1-\varphi_0)(1+\alpha^2)} - c_2},$$

$\varphi_m = V_m/V_и$ — относительная величина максимума потенциала в межэлектродном промежутке l, c_2 — постоянная интегрирования; ξ_m — положение максимума потенциала; $F(\gamma, k)$, $E(\gamma, k)$, $\mathbf{E}(k)$ и $\mathbf{K}(k)$ — эллиптические интегралы в форме Лежандра.

Для определения константы интегрирования потребуем непрерывности напряженности поля на границе областей I и II. Тогда

$$c_1 = c_2 = \sqrt{1-\varphi_m} + \alpha\sqrt{\varphi_m - \varphi_0}.$$

При достаточно большой эмиссии электронов источником наступит полное ограничение электронного тока своим пространственным зарядом $\alpha = \alpha_m$

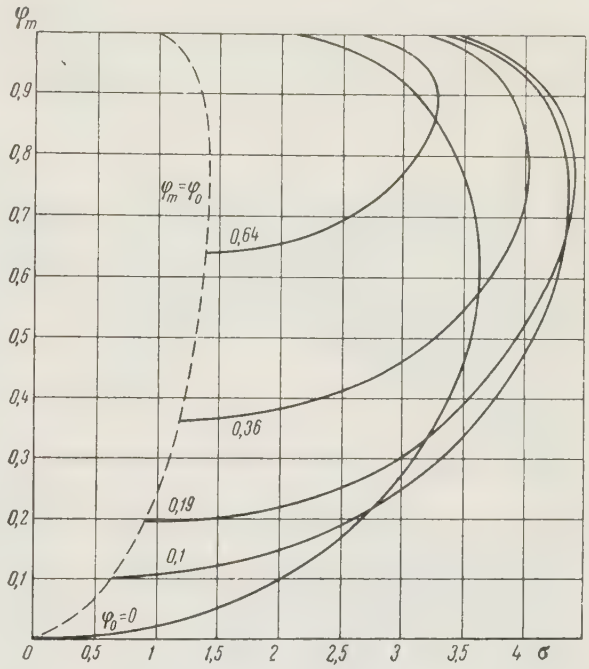


Рис. 2. Зависимость величины максимума потенциала в межэлектродном промежутке от отношения σ при различных смещениях потенциала на эмиттере электронов φ_0. Пунктирная кривая соответствует значениям $\varphi_0 = \varphi_m$

(напряженность электрического поля равна нулю у эмиттера электронов). В этом случае

$$c_2 = \sqrt{1-\varphi_0},$$

$$\varphi_m = \frac{4\alpha_m^2}{(1+\alpha_m^2)^2} + \left(\frac{1-\alpha_m^2}{1+\alpha_m^2}\right)^2 \varphi_0 \qquad (10)$$

и, следовательно,

$$\sigma = (1+2\sqrt{1-\varphi_0})\sqrt{1-\sqrt{1-\varphi_0}} + \frac{2\sqrt{2}\,\alpha_m (1-\varphi_0)^{3/4}}{(1+\alpha_m^2)^{1/2}}\{8\mathbf{E}(k) - (4+\sqrt{1+\alpha_m^2})\,\mathbf{K}(k)\}, \qquad (11)$$

$$\xi_1 = \sigma(1+2\sqrt{1-\varphi_0})\sqrt{1-\sqrt{1-\varphi_0}},$$

$$\xi_m = (1+\xi_1)/2,$$

$$k^2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+\alpha_m^2}}\right).$$

Зависимость величины максимума потенциала φ_m от отношения σ для различных смещений потенциала φ_0 показана на рис. 2. В области $\varphi_m < \varphi_0$ решение не существует, поскольку в этом случае электроны не

могут втягиваться в ионный поток. Вовлечение электронов в ионный поток становится возможным при

$$\sigma \geqslant \sigma_0 = (1 + 2\sqrt{1-\varphi_0})\sqrt{1-\sqrt{1-\varphi_0}}.$$

Из рис. 2 видно, что, начиная с некоторого значения $\sigma_0 \geqslant \sigma_1 = \sigma_0 + 2{,}73\,(1-\varphi_0)^{3/4}$, существуют два значения φ_m для одного и того же σ. Этот случай соответствует явлению ионного гистерезиса [3]. Из рис. 2 видно, что при заданном значении φ_0 величина $\sigma \leqslant \sigma_{\text{макс}}$, где $\sigma_{\text{макс}}$ находится из выражения (6) при $\alpha_m = 0{,}516$:

$$\sigma_{\text{макс}} = \sigma_0 + 4{,}05\,(1-\varphi_0)^{3/4}.$$

При значениях $\sigma > \sigma_{\text{макс}}$ существует решение с частичным отражением ионного тока от образующегося в межэлектродном промежутке виртуального анода к истинному аноду. Если обозначить величину отраженной части ионного тока через $\beta j_{\text{и}}$, а место отражения в относительных единицах через ξ_m, то

$$\beta = \frac{1-\alpha_m}{1+\alpha_m}, \tag{12}$$

где α_m находится при заданных значениях σ из выражения

$$\sigma = (1 + 2\alpha_m\sqrt{1-\varphi_0})\sqrt{1-\alpha_m\sqrt{1-\varphi_0}} + \\ + (1-\varphi_0)^{3/4}\left[\frac{1{,}365}{\sqrt{\alpha_m}} - \frac{\alpha_m^2\,(1+6\alpha_m+\alpha_m^2+2\alpha_m^3)}{(1+\alpha_m^2)^2}\sqrt{1-\alpha_m^2}\right] + \\ + \frac{\sqrt{2}\,\alpha_m\,(1-\varphi_0)^{3/4}}{2\,(1+\alpha_m^2)^{3/4}}\{8\alpha_m\,[\mathbf{E}(k_1) + E(\gamma_0, k_1)] - \\ - (4\alpha_m + \sqrt{1+\alpha_m^2})\,[\mathbf{K}(k_1) + F(\gamma_0, k_1)]\}, \tag{13}$$

причем

$$\sin^2\gamma_0 = \frac{\sqrt{1+\alpha_m^2}-1}{\sqrt{1+\alpha_m^2}-\alpha_m};$$

$$k_1^2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\alpha_m}{\sqrt{1+\alpha_m^2}}\right).$$

Из выражений (12) и (13) видно, что при заданном значении φ_0 отражение ионного тока наступает при $\sigma \geqslant \sigma_1$, т.е. в области значений $\sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_{\text{макс}}$ существуют три различных решения, соответствующих различным стационарным режимам распространения электронно-ионного потока.

Интересно отметить, что при $\sigma \to \infty$ величина $\alpha \to 0$, а $\beta \to 1$, т. е. величины электронного и проходящей части $(1-\beta)j_{\text{и}}$ ионного токов уменьшаются с увеличением межэлектродного промежутка l. Положение виртуального анода находится из выражения

$$\xi_m = 1 - \frac{1{,}365}{\sigma\sqrt{\alpha_m}}(1-\varphi_0)^{3/4}. \tag{14}$$

Кроме того, если $\varphi_0 > 0$, то электроны не могут проникнуть в ускоряющий промежуток d, а возвращаются силами ионного пространственного заряда

от некоторого сечения ξ_1 обратно к эмиттеру электронов. Положение места поворота электронного тока можно найти из следующего соотношения:

$$\sigma\xi_1 = (1 + 2\alpha_m\sqrt{1-\varphi_0})\sqrt{1-\alpha_m\sqrt{1-\varphi_0}} - \\ -(2\alpha_m + 1)\sqrt{1-\alpha_m}(1-\varphi_0)^{3/4}. \qquad (15)$$

Если $\varphi_0 = 0$, то электронный ток, попадая в ускоряющий промежуток, приводит к увеличению ионного тока, что в нашем случае будет соответствовать уменьшению всех значений σ на величину $\sqrt{j_и/j_{и0}}$, которая в зависимости от α находится из известного соотношения Ленгмюра [4].

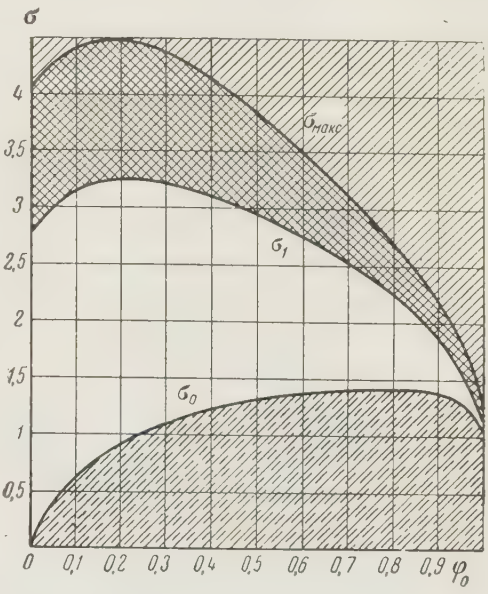


Рис. 3. Зависимость величины σ от величины смещения потенциала на эмиттере электронов φ_0 для различных режимов распространения электронно-ионного потока. Пунктирношгрихованная область соответствует полному прохождению ионного тока без вовлечения электронов в межэлектродный промежуток. Незаштрихованная область соответствует одному возможному стационарному электронно-ионному потоку с полным прохождением ионного тока. Двукратно заштрихованная область соответствует двум возможным стационарным электронно-ионным потокам с полным прохождением ионного тока (область ионного гистерезиса) и одному стационарному режиму с частичным отражением ионов. Однократно штрихованная область соответствует стационарному электронно-ионному потоку с частичным отражением ионного тока

На рис. 3 приведены границы возможных значений σ при заданных значениях $\varphi_0 > 0$. Если $0 < \varphi_0 < 1$ и $0 < \sigma < \sigma_0$, то в межэлектродном промежутке нет максимума потенциала и электроны в него не втягиваются; если же $\sigma_0 < \sigma < \sigma_1$, то в межэлектродном промежутке возможно единственное значение максимума потенциала и электроны втягиваются в этот промежуток разностью потенциалов $\Delta\varphi = \varphi_m - \varphi_0$; при $\sigma_1 < \sigma < \sigma_{макс}$ в межэлектродном промежутке возможны три значения максимума потенциала φ_m, которые соответствуют трем возможным стационарным электронно-ионным потокам, причем реализация того или иного потока зависит от конкретных условий эксперимента (например, от времени выхода на стационарный режим); при $\sigma \geqslant \sigma_{макс}$ в межэлектродном промежутке возможен только стационарный электронно-ионный поток с частичным (или полным) отражением ионов обратно к источнику.

Как указывалось, при наличии положительного относительно ускоряющего электрода смещения потенциала на эмиттере электронов последние совершают колебательные движения в межэлектродном промежутке около максимума потенциала с частотой

$$\nu_m = \frac{1}{2}\left(\int_l^{(1-\xi_1)l} \frac{dx}{v_э}\right)^{-1} = \frac{\sqrt{2\eta_э V_и}}{2d}\bar{\nu}_m, \qquad (16)$$

где

$$\bar{\nu}_m = \frac{(1+\alpha_m^2)^{3/4}}{6\sqrt{2}(1-\varphi_0)^{1/4}[2\mathbf{E}(k) - \mathbf{K}(k)]};$$

$\eta_э$ — удельный заряд электрона; $\alpha = \alpha_m$ (случай полного ограничения электронного тока своим пространственным зарядом).

Например, при $V_и = 10$ *кв*, $d = 1$ *см*, $\varphi_0 = 0{,}1$ $\nu_m \simeq 220$ *Мгц*.

Таким образом, при заданных значениях $\varphi_0 > 0$ можно выбрать значение σ таким, что ионный поток будет полностью доведен до эмиттера электронов.

3. ВНЕШНЯЯ ЗАДАЧА

Достигнув эмиттера электронов, ионы по инерции проникают за него в дрейфовое пространство, сообщая этому пространству положительный потенциал, что в свою очередь вызовет движение электронов от эмиттера в дрейфовое пространство. Электроны своим присутствием понижают потенциал пространства, способствуя дальнейшему распространению ионного потока. Таким образом, появляется физическая возможность получения длинных электронно-ионных потоков. Если пренебречь начальными скоростями электронов, то для нахождения распределения потенциала в дрейфовом пространстве можно воспользоваться уравнением (3), решение которого оказывается периодической функцией с периодом

$$d_0 = \frac{2\sqrt{2}\,\alpha_m (1-\varphi_0)^{3/4}}{(1+\alpha_m^2)^{7/4}} \{8\,\mathbf{E}(k) - (4+\sqrt{1+\alpha_m^2})\,\mathbf{K}(k)\}\,d. \quad (17)$$

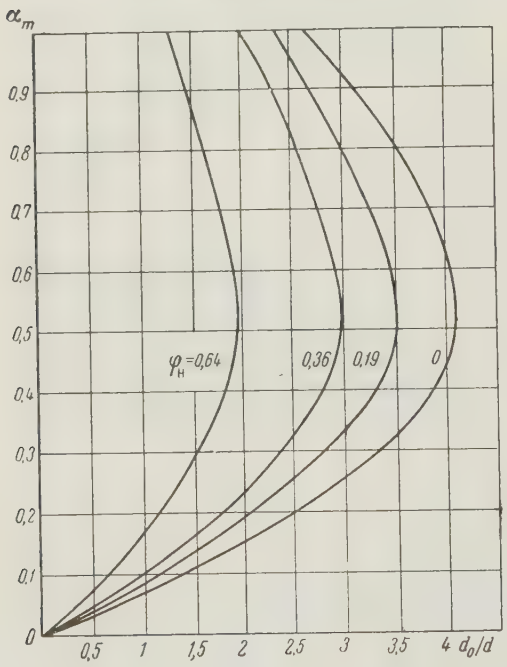


Рис. 4. Зависимость периода функции распределения потенциала от величины α_m, характеризующей проходящую часть электронного тока при различных значениях $\varphi_н$

В этом случае полного ограничения электронного тока своим пространственным зарядом ($\alpha = \alpha_m$) можно показать, что средняя по периоду функции распределения потенциала плотность пространственного заряда равна нулю. Величина $\alpha_m = \frac{j_э}{j_и}\sqrt{\frac{m}{M}}$ зависит от конкретных условий опыта и ее значение лежит в пределах $0 \leqslant \alpha_m \leqslant 1$.

Таким образом, как следует из выражения (17), даже при неравных плотностях электронного и ионного токов существует конечный квазинейтральный объем, соответствующий периоду d_0 функции распределения потенциала. В частности, если $j_э = j_и$ и $M \gg m$, то

$$d_0 \simeq 3\pi (1-\varphi_0)^{3/4} d \sqrt{\frac{2m}{M}}. \quad (18)$$

В случае равенства плотностей токов, как следует из выражения (10), $\varphi_m - \varphi_э \simeq 4\frac{m}{M}$, т. е. разность потенциалов, определяющая скорость

электронов в ионном потоке при ускоряющем ионы напряжении $V_и < 30$ *кв*, соизмерима с тепловыми скоростями электронов. Одновременный учет функции распределения электронов по начальным скоростям и эффекта пространственного заряда в уравнении Пуассона приводит к серьезным математическим трудностям. Однако в первом приближении можно заменить функцию распределения электронов по начальным скоростям постоян-

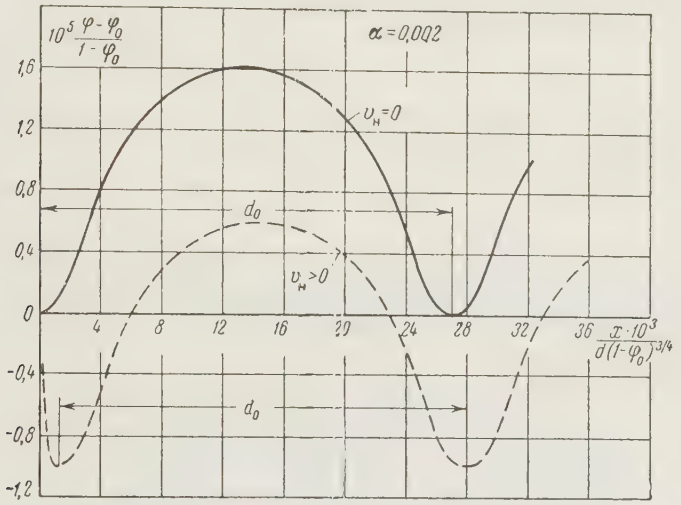


Рис. 5. Распределение потенциала в дрейфовом пространстве в отсутствие начальных скоростей у электронов ($\varphi_н - \varphi_0$) и для случая с начальной скоростью электронов

ой величиной, соответствующей средней скорости электронов. В этом лучае уравнение (3) и его решение останутся теми же, если произвести в

их замену φ_0 на $\varphi_н = \varphi_0 - \frac{mv_н^2}{2eV_и}$, где $v_н$—начальная скорость электронов, пределяемая температурой эмиттера.

На рис. 4 приведена зависимость отношения d_0/d от величины α_m для азличных значений $\varphi_н$. Двузначный характер кривых соответствует двум озможным стационарным режимам распространения электронно-ионного потока, установление которых зависит от условий выхода на такой ежим.

При таком учете начальных скоростей электронов для случая полного раничения электронного тока, проходящего в ионный поток, своим ространственным зарядом, наступает частичное отражение электронов братно к эмиттеру от некоторого расстояния $x_{мин}$ (явление виртуального атода). Начиная с расстояния $x > x_{мин}$, функция распределения потенциала будет периодической с периодом d_0, определяемым из выражения 7), причем величина α_m должна учитывать в этом случае только проходящую в ионный поток часть электронного тока, а φ_0 необходимо заменить на $_н$. На рис. 5 приведено характерное распределение потенциала в дрейфовом пространстве для различных значений начальных скоростей электронов.

Как видно, наличие начальных скоростей электронов мало изменяет еличину периода функции распределения потенциала, а средний потенциал пространства при этом уменьшается.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дж. Пирс, Теория и расчет электронных пучков, перев. с англ., Изд. Советское радио, 1956.
2. М. М. Бредов, Автоматическая компенсация объемного заряда в электронных пучках, Сб., посвященный 70-летию акад. А. Ф. Иоффе, Изд. АН СССР, 1950.
3. F. Wentzl, Ionen und elektronen einheitlicher Anfangsgeschwindigkeiten in Vakuum, Z. angew. Phys., 1952, **4**, 3, 94.
4. I. Langmuir, The interaction of electron and positive ion space charges in cathode sheaths, Phys. Rev., 1929, **33**, 6, 954.

Поступила в редакцию
4 IV 1961

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

К ВОПРОСУ О НАКОПЛЕНИИ ШУМОВ И ЗАМИРАНИЙ В РАДИОРЕЛЕЙНЫХ ЛИНИЯХ СВЯЗИ С ДАЛЬНИМ ТРОПОСФЕРНЫМ РАСПРОСТРАНЕНИЕМ

Ю. Б. Синдлер

При исследовании процессов, происходящих в радиорелейных линиях с дальним тропосферным распространением, может представить интерес асимптотическая оценка закона распределения вероятностей флуктуаций выходного шума в области его больших значений в случае, когда эти флуктуации обусловлены замираниями сигнала на участках линии.

Замирания в радиорелейных линиях с дальним тропосферным распространением имеют ту особенность, что в них отчетливо выражены медленные и быстрые флуктуации (так называемые «медленные и быстрые замирания»).

Пусть имеется радиорелейная линия с дальним тропосферным распространением, состоящая из n участков. Примем следующую модель замираний.

Положим, что радиоволны распространяются исключительно за счет рассеяния на неоднородностях тропосферы, и в точку приема приходит большое количество элементарных лучей с общей мощностью $2\sigma^2$. Фазовые сдвиги между отдельными лучами и амплитуды лучей непрерывно изменяются в зависимости от случайной структуры рассеивающего объема. Это обстоятельство приводит к быстрым замираниям сигнала. Мощность сигнала $2\sigma^2$ изменяется медленно под действием изменений средних условий рефракции, средней интенсивности турбулентностей и т. д.

Положим, что при фиксированной величине σ амплитуда напряженности поля распределена по релеевскому закону

$$W(E/\sigma) = \frac{E}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{E^2}{2\sigma^2}\right). \tag{1}$$

Будем считать, что параметр σ является случайным, причем он изменяется медленно, а его одномерный закон распределения вероятностей является логарифмически нормальным:

$$W(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma s} \exp\left[-\frac{(\ln\sigma - \overline{\ln\sigma})^2}{2s^2}\right], \tag{2}$$

где s — среднеквадратичное отклонение параметра σ в неперах. Параметр s будем называть глубиной медленных замираний. Формула (1) дает условную плотность вероятностей величины E при фиксированном σ. Безусловную плотность вероятностей напряженности поля $W(E)$ можно представить в виде

$$W(E) = \int_0^\infty W(E/\sigma)\, W(\sigma)\, d\sigma = \frac{1}{\sqrt{2\pi}s} \int_0^\infty \frac{E}{\sigma^3} \exp\left[-\frac{E^2}{2\sigma^2} - \frac{(\ln\sigma - \overline{\ln\sigma})^2}{2s^2}\right] d\sigma. \tag{3}$$

Интерес представляет оценка закона распределения напряженности поля E в области малых ее значений. Для малых E с помощью (3) нетрудно получить

$$W(E) \simeq E \exp\left[2\left(s^2 - \overline{\ln\sigma}\right)\right]. \tag{4}$$

Мощность флуктуационного шума, вносимого одним участком радиорелейной линии, равна

$$y = \frac{B}{E^2}, \tag{5}$$

где B — постоянный коэффициент, зависящий от аппаратуры радиорелейной линии.

Функцию распределения мощности шума на одном участке для больших значений шума можно оценить формулой

$$F(y) \simeq 1 - \frac{B}{2y} \exp\left[2\left(s^2 - \overline{\ln \sigma}\right)\right]. \tag{6}$$

Воспользуемся результатами работы [1], в которой даны формулы, позволяющие оценивать функцию распределения суммарного шума Y на выходе радиорелейной линии, состоящей из n идентичных участков. Когда медленные замирания на соседних участках независимы, имеет место следующее соотношение

$$F_n(Y) \simeq 1 - \frac{nB}{2Y} \exp\left[2\left(s^2 - \overline{\ln \sigma}\right)\right], \tag{7}$$

где $F_n(Y)$ — функция распределения мощности суммарного шума.

Из формулы (7) видно, что наличие медленных замираний с параметрами s и $\overline{\ln \sigma}$ приводит к увеличению вероятности превышения шумов больших уровней приблизительно в $\exp\left[2\left(S^2 - \overline{\ln \sigma}\right)\right]$ раз по сравнению со случаем, когда имеются только быстрые замирания с релеевским законом распределения с параметром $\sigma = 1$.

Представляет интерес асимптотическая оценка закона распределения шумов при корреляции медленных замираний на соседних участках. Анализ показывает, что асимптотическая формула (7) справедлива и в том случае, когда медленные замирания происходят синхронно (т. е. их коэффициент корреляции равен единице). Таким образом, при полной корреляции медленных замираний на соседних участках и при их независимости асимптотические свойства закона распределения суммарного шума получаются одинаковыми.

ЛИТЕРАТУРА

Ю. Б. Синдлер, Накопление шума в ЧМ-радиорелейных линиях связи, обусловленное замирание сигнала, 1956, **1**, 5, 627.

Поступила в редакцию
11 VIII 1961

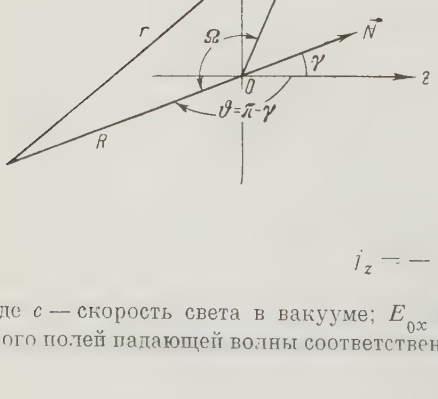
ОБ ОТРАЖЕНИИ МЕТАЛЛИЧЕСКИМИ ТЕЛАМИ РАДИОВОЛН КРУГОВОЙ ПОЛЯРИЗАЦИИ

П. Я. Уфимцев

В статье [1] предложен способ непосредственного измерения «неравномерной» составляющей поля, рассеянного металлическими телами вращения. В данном сообщении доказано, что этот способ пригоден для измерения неравномерной составляющей поля, рассеянного любыми металлическими телами конечных размеров.

Пусть плоская электромагнитная волна облучает находящееся в свободном пространстве металлическое тело произвольной формы, элемент поверхности которого изображен на рисунке. Выберем систему координат так, чтобы нормаль $\vec{N}$ к фронту падающей волны, проведенная через начало координат, лежала в плоскости yoz. Угол между этой нормалью и осью z обозначим через γ.

Нетрудно показать, что в случае E-поляризации ($\vec{E}_0 \perp yoz$) падающей волны плотность тока, наведенного на поверхности тела, определяется в приближении Кирхгофа формулами



$$\begin{aligned} j_x &= -\frac{c}{2\pi} E_{0x} (n_y \sin\gamma + n_z \cos\gamma) e^{i\Psi}, \\ j_y &= \frac{c}{2\pi} E_{0x} n_x \sin\gamma\, e^{i\Psi}, \\ j_z &= \frac{c}{2\pi} E_{0x} n_x \cos\gamma\, e^{i\Psi}, \end{aligned} \tag{1}$$

а в случае H-поляризации $\vec{H}_0 \perp yoz$—формулами

$$\begin{aligned} j_x &= 0, \\ j_y &= \frac{c}{2\pi} H_{0x} n_z e^{i\Psi}, \\ j_z &= -\frac{c}{2\pi} H_{0x} n_y e^{i\Psi}, \end{aligned} \tag{2}$$

где c — скорость света в вакууме; E_{0x} и H_{0x} — амплитуды электрического и магнитного полей падающей волны соответственно при E- и H-поляризациях; $\Psi = k(y' \sin\gamma +$

$+ z' \cos\gamma$) — фаза падающей волны в точке (x', y', z') на поверхности тела; n_x, n_y, n_z — составляющие нормали к поверхности в этой же точке. Зависимость от времени подразумевается заданной в виде $e^{-i\omega t}$.

Вычисляя далее по найденному току рассеянное поле в дальней зоне, получим при E-поляризации

$$E_\varphi = -H_\vartheta = \frac{ik}{2\pi} E_{0x} \frac{e^{ikR}}{R} \int [n_x \sin\gamma \cos\varphi + (n_y \sin\gamma + n_z \cos\gamma) \sin\varphi]\, e^{i\Phi}\, dS,$$

$$E_\vartheta = H_\varphi = \frac{ik}{2\pi} E_{0x} \frac{e^{ik}}{R} \int [n_x (\sin\gamma \cos\vartheta \sin\varphi - \cos\gamma \sin\vartheta) - (n_y \sin\gamma + n_z \cos\gamma) \cos\varphi \cos\vartheta]\, e^{i\Phi}\, dS \qquad (3)$$

и при H-поляризации

$$E_\varphi = -H_\vartheta = \frac{ik}{2\pi} H_{0x} \cos\varphi \frac{e^{ikR}}{R} \int n_z e^{i\Phi}\, dS,$$

$$E_\vartheta = H_\varphi = \frac{ik}{2\pi} H_{0x} \frac{e^{ikR}}{R} \int (n_y \sin\vartheta + n_z \sin\varphi \cos\vartheta)\, e^{i\Phi}\, dS, \qquad (4)$$

где R, ϑ, φ — сферические координаты точки наблюдения; $\Phi = \Psi - kr' \cos\Omega$, а интегрирование осуществляется по освещенным элементам поверхности тела. В радиолокационном случае, когда направления наблюдения и облучения совпадают ($\vartheta = \pi - \gamma$, $\varphi = -\pi/2$), отсюда соответственно следует

$$E_x = -H_\vartheta = \frac{iaE_{0x}}{2} \overline{\Sigma}_k \frac{e^{ikR}}{R}, \quad E_\vartheta = H_x = 0 \qquad (3a)$$

и

$$H_x = E_\vartheta = \frac{ia H_{0x}}{2} \Sigma_k \frac{e^{ikR}}{R}, \quad E_x = H_\vartheta = 0. \qquad (4a)$$

Входящая в эти формулы величина a представляет собой какой-либо линейный размер тела, а функции Σ_k и $\overline{\Sigma}_k$ определяются соотношением

$$\Sigma_k = -\overline{\Sigma}_k = \frac{k}{\pi a} \int (n_y \sin\gamma + n_z \cos\gamma)\, e^{i\Phi}\, dS. \qquad (5)$$

Таким образом, мы показали, что равенство $\Sigma_k = -\overline{\Sigma}_k$ выполняется для тел произвольной формы. Следовательно, способ, описанный в статье [1], имеет общее значение и позволяет выделить из полного поля, рассеянного любыми металлическими телами, ту его часть, которая обусловлена искривлением поверхности (изгибом, изломом, острием, выступом, отверстием и т. д.).

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. Н. Майзельс, П. Я. Уфимцев, Радиотехника и электроника, 1960, 5, 12, 1925.

Поступило в редакцию
10 VI 1961

СИММЕТРИЧНЫЕ ДИАГРАММЫ, РЕАЛИЗУЕМЫЕ ПРИ ПОМОЩИ КРУГЛОГО ИЗЛУЧАЮЩЕГО РАСКРЫВА

Б. М. Минкович

Условия реализуемости диаграммы направленности для линейной антенны конечной длины определены известной теоремой Винера — Палея [1]. Аналогия между линейной антенной и круглым раскрывом, установленная в [2], указывает на возможность получения условий реализуемости симметричной диаграммы направленности в круглом раскрыве конечных размеров. В дальней зоне диаграмма направленности круглого раскрыва выражается при помощи преобразования Ганкеля [3]

$$F(u) = \int_0^1 A(\rho)\, J_0(u\rho)\, \rho d\rho, \qquad (1)$$

где

$$A(\rho) = \int_0^\infty F(u)\, J_0(u\rho)\, u du, \qquad (2)$$

причем связь, устанавливаемая выражениями (1) и (2), справедлива не при любых четных, даже непрерывных функциях $F(u)$ и $A(\rho)$.

Найдем условия, которым должны удовлетворять функции $F(u)$ и $A(\rho)$.

Посредством выражений (1) и (2) легко получить, что функции $F(u)$ и $A(\rho)$ связаны между собой равенством, аналогичным равенству Парсеваля для преобразования Фурье

$$\int_0^\infty |F(u)|^2 u du = \int_0^1 |A(\rho)|^2 \rho d\rho. \tag{3}$$

Для физически реализуемого амплитудного распределения:

$$\int_0^1 |A(\rho)|^2 \rho d\rho < \infty \tag{4}$$

или

$$\int_0^\infty |F(u)|^2 u du < \infty, \tag{5}$$

в противном случае коэффициент направленного действия будет равен нулю [3]. Когда $F(0)$ конечно, то тем более справедливо

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(u)|^2 du < \infty. \tag{6}$$

Сведем теперь преобразование Ганкеля (1) к преобразованию Фурье и после этого, с учетом (6), воспользуемся теоремой Винера — Палея для преобразования Фурье. Так как [4]

$$J_0(u\rho) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\cos u\rho y}{\sqrt{1-y^2}} dy,$$

то (1) принимает вид

$$F(u) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} I_1(y) e^{iuy} dy, \tag{7}$$

где

$$I_1(y) = \int_y^1 \frac{A(\rho)\rho}{\sqrt{\rho^2 - y^2}} d\rho$$

— четная функция из класса $L_2(-1,1)$. Следовательно, задача о реализуемости симметричной диаграммы направленности в круглом раскрыве сводится к аналогичной задаче для линейного раскрыва. Получаем теперь условия, которым должна удовлетворять функция $F(u)$: продолжение функции в комплексную область $F(z)$ должно быть целой трансцендентной функцией экспоненциального типа с показателем $\leqslant 1$; на действительной оси функция $F(z)$ должна удовлетворять условию (5), а не (6), как в случае линейного раскрыва. Из (5) видно, что функции, которые еще могут быть реализованы в качестве диаграммы направленности круглого раскрыва, должны убывать на бесконечности в $\sqrt{u}$ раз быстрее, чем соответствующие функции для линейного раскрыва. Этот результат ранее был получен Тейлором [5]. Значит, например, диаграммы направленности, при больших u имеющие вид $\sin u/u$ (соответствующие им амплитудные распределения в линейном раскрыве имеют пьедестал [5]), не могут быть реализованы в круглом раскрыве, так как интеграл (5) не сходится.

ЛИТЕРАТУРА

Н. И. Ахиезер, Лекции по теории аппроксимации, ГТИ, 1947.
Б. М. Минкович, Ю. И. Давидчевский, К синтезу антенны с круглым раскрывом, Радиотехника и электроника, 1961, 6, 8, 1395.
Антенны сантиметровых волн, пер. с англ. под ред. Я. Н. Фельда, Изд. Советское радио, ч. I, 1950.
Е. Титчмарш, Введение в теорию интегралов Фурье, ОГИЗ, 1948.
T. T. Taylor, Design of circular apertures for narrow beamwidth and low side-lobes, IRE Trans., 1960, AP-8, 1, 17.

Поступило в редакцию
10 VII 1961

ЗАВИСИМОСТЬ СВОЙСТВ ЦЕПОЧКИ РЕЗОНАТОРОВ ОТ СМЕЩЕНИЯ ЩЕЛЕЙ В СМЕЖНЫХ ДИАФРАГМАХ

Я. К. Трохименко

В электронно-лучевых приборах с продольным взаимодействием применяются медляющие системы типа цепочек цилиндрических резонаторов, индуктивно связанных через щели в диафрагмах.

Теоретический анализ подобных систем, достаточно пригодный для практических целей, изложен в работе [1].

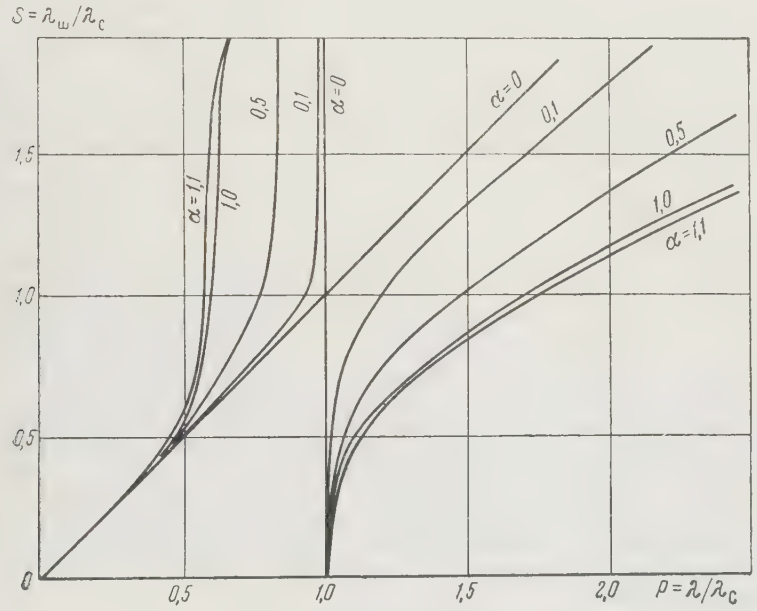


Рис. 1

Дисперсионное уравнение (31) за [1] для колебаний, близких к колебаниям типа TM_{010} в резонаторах, разделенных тонкими одношелевыми диафрагмами, можно представить в следующем виде:

$$\frac{p^2 - 1}{p^3 \operatorname{tg}\left(\frac{\pi S}{2p}\right) - \frac{\pi}{2} S p^2} = \alpha, \qquad (1)$$

где $p = \lambda/\lambda_c$ — относительная длина волны в свободном пространстве; $S = \lambda_щ/\lambda_c$ — относительная резонансная длина волны щели (для узких периферических щелей $S = 2b$, где b — длина щели); $\lambda_c = 2{,}615\,a$ — собственная длина волны цилиндрического резонатора радиуса a для колебаний типа TM_{010}; $\alpha = \alpha_\pi \sin^2 \frac{\varphi}{2}$ — коэффициент связи между полостями; $\alpha_\pi = 0{,}18 \frac{aZ_0}{bZ_{св}}$ — статический коэффициент связи; b — волновое сопротивление линии передачи, эквивалентной щели [1]; $Z_{св} = \sqrt{\mu/\varepsilon}$ — волновое сопротивление свободного пространства; φ — фазовый сдвиг на период системы (на один резонатор).

Решение дисперсионного уравнения (1) для двух наиболее длинноволновых полос пропускания приведено на рис. 1 в виде графиков зависимости $S = f(p, \alpha)$.

При слабой связи ($S < 1$) полоса пропускания, связанная с собственной длиной волны резонаторов, является более длинноволновой и характеризуется отрицательной дисперсией ($\lambda_0 < \lambda_\pi$). Полоса пропускания, связанная с резонансной длиной волны щелей, имеет положительную дисперсию. Увеличение связи при $S < 1$ приводит к расширению обеих полос пропускания, причем полоса пропускания связанная с λ_c, расширяется за счет увеличения λ_π при неизменном значении $\lambda_0 = \lambda_c$.

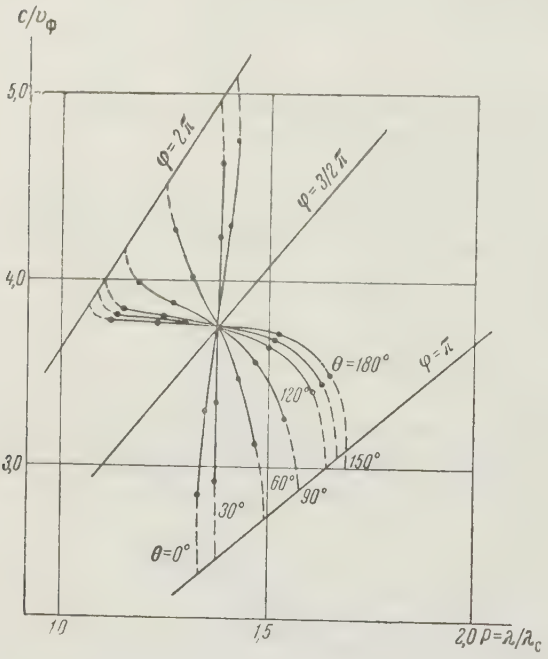


Рис. 2

При $S = 1$ обе полосы пропускания смыкаются в точке $p = 1$.

При $S > 1$ с собственной длиной волны резонатора λ_0 оказывается связанной более коротковолновая полоса пропускания, а с $\lambda_щ$ — более длинноволновая полоса пропускания. Знак дисперсии в обеих полосах пропускания при $S = 1$ изменяется на обратный. При дальнейшем увеличении связи полоса пропускания, связанная с λ_c, несколько сужается, а полоса пропускания щелей расширяется и сдвигается в сторону длинных волн.

Уравнение (1) справедливо лишь для случая слабой связи, когда можно пренебречь влиянием продольных магнитных полей, возникающих вблизи щелей связи. Влияние продольного магнитного поля сказывается в понижении резонансной длины волны щелей (из-за возникновения собственных токов щели) и изменении дисперсии и ширины полосы пропускания — в основном за счет взаимных токов щелей, определяющих непосредственную связь между щелями [1]. Величина взаимных токов зависит от периода системы и расположения щелей в смежных диафрагмах.

Количественно влияние продольного магнитного поля в работе [1] учитывается формулами (46), справедливыми для случая идентично расположенных однощелевых диафрагм. Для важного на практике случая поочередного смещения щелей в смежных диафрагмах влияние продольного магнитного поля может быть учтено (что подтверждается экспериментально) подстановкой в уравнение (1) вместо параметров S и α соответственно параметров

$$S' = \frac{S}{\sqrt{1 + P - Q\cos\varphi\cos\Theta}},$$

$$\alpha'_\pi = \alpha_\pi \sqrt{1 + P - Q\cos\varphi\cos\Theta}, \qquad (2)$$

где Θ — угол поворота щелей в смежных диафрагмах (через одну), P и Q — коэффициенты, учитывающие величину собственных и взаимных токов щели соответственно. Коэффициенты P и Q ($P > Q$) приближенно вычисляются по формулам (44) работы [1], справедливым для простейших конфигураций щелей связи.

Формулы (2) отличаются от формул (46) работы [1] введением множителя $\cos\Theta$, учитывающего поочередный (через одну) сдвиг диафрагм в системе на угол Θ.

Расчет по формулам (1) и (2) дает хорошее количественное совпадение с экспериментом в случае узких периферических щелей с угловой длиной порядка 90°. Для практически применяемых щелей и резонаторов более сложной формы выражения (1) и (2) позволяют дать качественную оценку влияния геометрии замедляющей системы на ее свойства.

Рассмотрим практически важный случай $S > 1$, $p > 1$ (рис. 1).

При угле сдвига смежных диафрагм на 90° взаимные токи не влияют на свойства системы ($\cos\Theta = 0$), а влияние собственных токов сказывается в уменьшении резонансной длины волны щели

$$S'(0) = S'(\pi) = S/\sqrt{1 + P},$$

что приводит, как следует из графиков рис. 1, к некоторому сужению полосы пропускания, которое лишь частично компенсируется увеличением коэффициента связи $\alpha_\pi' = \alpha_\pi \sqrt{1+P}$.

При идентичном расположении диафрагм ($\Theta = 0$) и $\varphi = 0$ резонансная длина волны щели увеличивается ($S'(0) = S/\sqrt{1+P-Q}$), а при $\varphi = \pi$ уменьшается ($S'(\pi) = S/\sqrt{1+P+Q}$). Это приводит к резкому сужению полосы пропускания, а при достаточно больших значениях непосредственной связи между щелями — к изменению знака дисперсии в длинноволновой полосе пропускания.

При $\Theta = 180°$ резонансная длина волны щели, соответствующая $\varphi = 0$, уменьшается ($S'(0) = S/\sqrt{1+P+Q}$), а резонансная длина волны щели, соответствующая $\varphi = \pi$, увеличивается ($S'(\pi) = S/\sqrt{1+P-Q}$). Это приводит к расширению полосы пропускания по сравнению со случаем $\Theta = 90°$.

Приведенные теоретические оценки хорошо согласуются с экспериментом. На рис. 2 показаны дисперсионные характеристики однощелевой системы для первой положительной пространственной гармоники, снятые при различных значениях угла Θ ($\alpha_\pi \simeq 0{,}4$). Как и следует из (2), при изменении Θ дисперсионные характеристики поворачиваются в точке, соответствующей примерно $\varphi = \frac{3}{2}\pi$.

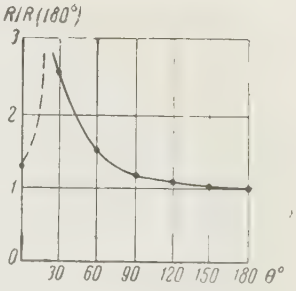


Рис. 3

Экспериментальные исследования показали также, что зависимость сопротивления связи R для первой пространственной гармоники от угла Θ в основном определяется изменением отношений $v_ф/v_{гр}$, так как распределение поля вблизи оси системы и запас энергии на единицу длины мало зависят от Θ. Зависимость $R(\Theta)$ при сдвиге фазы на период системы $\varphi = \frac{3}{2}\pi$ приведена на рис. 3.

Подобным образом можно оценивать и свойства системы с иной конфигурацией диафрагм. В частности, для двухщелевых диафрагм (щели симметричны относительно оси системы) максимальная ширина полосы пропускания системы соответствует сдвигу смежных диафрагм на угол $\Theta = 90°$.

Таким образом, изменение угла поворота щелей в смежных диафрагмах цепочки резонаторов с индуктивной связью позволяет в сравнительно широких пределах изменять характеристики замедляющей системы. Это свойство может быть использовано, в частности, для целей согласования, а также для постепенного изменения параметров замедляющей системы, что важно в ряде случаев применения. Большой интерес представляют также исследования систем, в которых щели связи в диафрагмах сдвинуты по спирали.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. A. Allen, G. S. Kino, On the theory of strongly coupled cavity chains, IRE Trans., 1960, MTT-8, 3, 362.

Поступило в редакцию
8 V 1961

СОДЕРЖАНИЕ Т. VI ЖУРНАЛА «РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА» ЗА 1961 Г.

Выпуск 1

Бункин Ф. В. О тепловых флуктуациях в нелинейных системах 3
Бахарева М. Ф. Поперечная корреляция флуктуаций поля при конечных размерах приемных линз 9
Просин А. В. К расчету мощности перекрестных шумов в системах дальней связи 14
Игнатьев П. К. Энергетический спектр сигнала, получаемого посредством развертки 25
Вайнштейн Л. А., Федоров А. А. Рассеяние плоских и цилиндрических волн на эллиптическом цилиндре и концепция дифракционных лучей 31
Горянов А. С. Дифракция плоской электромагнитной волны, распространяющейся вдоль оси конуса 47
Сивов А. Н. Падение плоской электромагнитной волны на плоскую решетку (случай, когда вектор H параллелен проводам) 58
Яшкин А. Я. Равномерный изгиб $П$- и $Т$-волноводов в плоскости E 67
Никольский В. В. Исследование полых систем с анизотропными областями методом собственных функций. Ч. III. Волновод 74
Булгаков Б. М., Шестопалов В. П., Шишкин Л. А., Якименко И. П. Необратимое распространение волн в спиральном волноводе, помещенном в ферритовую среду 81
Шестопалов В. П., Булгаков А. А. Коаксиальная замедляющая система из двух спиралей со встречной намоткой, заполненная магнитодиэлектрической средой 92
Сюй Янь-шэн. Некоторые методы решения задачи о колебаниях малой гиротропной сферы. Ч. II. Метод рядов 101
Федотов А. П., Шембель Б. К. Резонатор линейного ускорителя как нагрузка высокочастотных генераторов 108
Лобов Г. Д. Газоразрядный детектор колебаний СВЧ 117
Рубин С. Б. Некоторые теоретические вопросы работы фазометра на СВЧ . . . 125
Игрицкий А. Л. Оптимальная фокусировка электронного пучка в периодическом фокусирующем устройстве ЛБВ 137
Яснопольский Н. Л., Карелина Н. А., Малышева В. С. Некоторые результаты исследования вторичной электронной эмиссии на прострел эмиттеров из окиси магния 146
Шварц Я. М. К теории работы электростатического флюксметра в плазме . . . 153
Белова Н. А., Ковалев А. Н. Экспериментальное исследование туннельного тока в узких германиевых p — n-переходах 160
Базаров Е. Н., Жаботинский М. Е. Флуктуации в генераторе на отражательном клистроне, обусловленные разбросом скоростей электронов в потоке, дробовым и тепловым эффектами 166

Краткие сообщения

Цейтлин М. Б., Ильина Е. М. Усиление лампы бегущей волны при конечных значениях параметра усиления C 170
Григорьянц В. В., Жаботинский М. Е. Молекулярный генератор на аммиаке, работающий без жидкого азота 175

Письма в редакцию

Габович М. Д. К вопросу о механизме возбуждения электронных плазменных колебаний 178
Абрам Федорович Иоффе 180

Выпуск 2

Лезин Ю. С. Накопление шумов в устройствах с задержанной обратной связью 187
Нудельман П. Я. К вопросу о линейной коррекции переходных процессов в системах с конечной шириной полосы пропускания 193
Линь Хай-цюань. К вычислению пропускной способности двухлучевых каналов связи 197
Линь Хай-цюань. О пропускной способности однолучевых и двухлучевых каналов связи при поляризационных замираниях 200

Шабельников А. В. Метод возмущений и его связь со строгим дифракционным методом при решении задач некогерентного рассеяния 204
Пономарев Н. Г. Графический метод построения профилей апланатических антенн 214
Терешин О. Н., Соколов А. Е. Подавление токов, возбуждаемых на металлическом экране дифракционной антенной конечных размеров 221
Каценеленбаум Б. З., Малина З. А. Расчет переходов для симметричной магнитной волны в круглом волноводе 228
Фельдштейн А. Л. Синтез ступенчатых направленных ответвителей 234
Казанцев Ю. Н. Об измерении затухания в волноводах 241
Муромцев В. И., Пискунов А. К. Некоторые вопросы согласования тракта СВЧ в радиоспектроскопах 250
Рапопорт Г. Н. Усилитель обратной волны в режиме сильных сигналов . 261
Касаткин Л. В. Об усилении волн пространственного заряда при прохождении пучков электронов в средах с индуктивной проводимостью 267
Игрицкий А. Л. Расчет магнитного периодического фокусирующего устройства для лампы бегущей волны 275
Лобов Г. Д., Еремеев В. И. Некоторые эффекты, сопровождающие детектирование в газовом разряде 286
Елинсон М. И., Степанов Г. В., Покалякин В. И. Эмиссия горячих электронов из p — n-переходов в кристаллах SiC 292
Фурсей Г. Н. Автоэлектронная эмиссия с монокристаллов вольфрама, предшествующая развитию вакуумной дуги 298
Мякишев Г. Я. К теории статической характеристики плоского диода без накаленного катода с учетом теплового распределения электронов по скоростям 303
Носов Ю. Р. Переходные процессы в полупроводниковых диодах при коротких импульсах прямого тока 313
Григорьянц В. В., Жаботинский М. Е. Молекулярный стандарт частоты с вычитанием ошибки опорного генератора 321

Краткие сообщения

Михайловский Л. К. Широкополосное усиление с преобразованием частоты . 329
Елькинд А. И. Подавление гармоник в коаксиальных резонаторах 331
Бахрах Л. Э., Сулимин А. Д. К расчету электронных прожекторов ленточного потока 333
Елинсон М. И., Горьков В. А. Некоторые особенности работы автоэлектронных катодов в электрических полях СВЧ 336
Макуха В. И. Адсорбция кальция на вольфраме 339
Макуха В. И. Адсорбция стронция на вольфраме 342
Васильев В. П., Помазков В. П. Определение свободного бария в оксидном катоде методом радиоактивных индикаторов 343

Выпуск 3

Аксенов В. И. Применение приближения Кирхгофа к задаче о рассеянии электромагнитных волн на периодически неровных поверхностях с конечной проводимостью 347
Карпеев Г. А. Применение двухэлементного интерферометра для исследования флуктуаций волновых полей 355
Малышев В. А., Михалевский В. С. К теории ЛБВ-генераторов со слабой обратной связью 363
Советов Н. М. Обобщение круговой диаграммы полных сопротивлений на случай трактов СВЧ с отрицательным сопротивлением 371
Молоковский С. И., Сушков А. Д. Исследование электрического поля плотного пакета заряженных частиц 375
Зубенко Ю. В. Изучение формы монокристаллических эмиттеров из карбида вольфрама при помощи электронного микроскопа 381
Птушинский Ю. Г. Влияние адсорбции на сопротивление тонких металлических пленок. Ч. II. Электроположительные атомы 384
Застенкер Г. Н., Солнцев Г. С., Швилкин Б. П. О механизме формирования высокочастотного разряда низкого давления в воздухе 387
Поляк И. М. Электронный ток в трубках типа Пеннинга 395
Соколов Ю. Ф. Новый вариант метода четырехполюсника для определения сопротивлений контактов полупроводниковых диодов в диапазоне СВЧ . 399
Соловьев Е. Г., Карлова Е. К. Штыревая замедляющая система для парамагнитного усилителя бегущей волны сантиметрового диапазона волн 406
Карлов Н. В., Пименов Ю. П., Прохоров А. М. Насыщение парамагнитных усилителей и время восстановления усиления 410
Карлов Н. В., Пименов Ю. П., Прохоров А. М. О чувствительности радиоприемных устройств с парамагнитными усилителями 416

Калачев П. Д., Саломонович А. Е. Радиотелескоп ФИАН СССР с 22-метровым параболическим рефлектором 422
Карачун А. М., Кузьмин А. Д., Саломонович А. Е. Исследование некоторых электрических параметров антенны 22-метрового радиотелескопа ФИАН СССР 430
Пискунов А. К., Муромцев В. И. О влиянии флуктуаций частоты сигнального генератора на чувствительность радиоспектроскопов с проходным и отражательным резонаторами 437

Краткие сообщения

Персиков М. В. Фильтр волны H_{02} в волноводе круглого сечения 444
Персиков М. В. О возбуждении волны H_{01} в волноводе круглого сечения . . . 446

Письма в редакцию

Альбер С. И., Беспалов В. И. О диффузионном уравнении для статистически неоднородного волновода 448
Гершенштейн М. Е., Васильев В. Б. По поводу письма С. И. Альбера и В. И. Беспалова «О диффузионном уравнении для статистически неоднородного волновода» 449

Критика и библиография

Ланцберг Г. С. Книги по радиотехнике и электронике в 1961 г. 451

Хроника

Александр Николаевич Щукин (*к шестидесятилетию со дня рождения*) . . . 479

Выпуск 4

Сивов А. Н. Электродинамическая теория частой плоской решетки из параллельных проводов 483
Евтянов С. И., Кулешов В. Н. Флуктуации в автогенераторах 496
Кульман Н. К., Ланда П. С. Исследование на электронных моделях некоторых оптимальных устройств для фильтрации импульсных сигналов случайной длительности 506
Писаренко В. Ф. К задаче обнаружения случайного сигнала на фоне шума . 514
Лезин Ю. С. Влияние параметров накопительных устройств на эффективность их работы 529
Тартаковский Г. П. Радиодальномер с частотной модуляцией при воздействии шумов и при флуктуациях отраженного сигнала 536
Кинбер Б. Е. О боковом излучении зеркальных антенн 545
Уфимцев П. Я. Симметричное облучение конечных тел вращения 559
Дядьков С. Резонансные преобразования и их свойства 568
Самуйлов Г. П. О приближенном расчете собственных значений высших типов волн в полосковых линиях 579
Дашенков В. М. Волновые сопротивления многопроводных линий с круглыми проводниками 584
Филимонов Г. Ф. Влияние двух видов продольной периодической модуляции на свойства однолучевого потока электронов 593
Малышев В. А. К теории диодных СВЧ-генераторов 604
Игрицкий А. Л. Расчет периодических электростатических полей, создаваемых бифилярными спиралями в лампах бегущей волны 613
Микаэлян А. Л., Васильев А. А. Взаимодействие магнитостатических колебаний в ферритовом образце при регенерации. Ч. I. Взаимодействие простейших типов колебаний 623
Кончук Л. В. Некоторые свойства многощелочного фотокатода, выполненного в виде массивного слоя 631
Бакал М., Добрецов Л. Н. Вакуумный конденсатор Милликена. Ч. I 637
Афиногенов Л. П., Бакал М., Филиппов Ю. А. Вакуумный конденсатор Милликена. Ч. II 642

Краткие сообщения

Цыбаков Б. С. Шенноновская схема для гауссовского сообщения с равномерным спектром и канала с флуктуационным шумом 649
Кинбер Б. Е. К теории приемной антенны 651
Шестопалов В. П., Якименко И. П. О затухании медленных электромагнитных волн в плазменном стержне при наличии продольного магнитного поля . . 653
Басс Ф. Г. О граничных условиях электродинамики на плоской поверхности с произвольным значением диэлектрической проницаемости 655
Бахрах Л. Э. Об оценке влияния тепловых скоростей в электронных пучках 656
Порев Н. Д. К расчету трубчатых электронных пучков 659
Либин В. А. Анализатор поляризации 661
Богданов Г. Б. О возможности применения ферритов для абсолютного измерения мощности СВЧ 663

Ишин Д. Д., Калягина Л. А. Влияние температурной предыстории на магнитную проницаемость никель-цинковых ферритов 667
Ронштейн И. М., Щучинский Я. М. Энергетический спектр медленных вторичных электронов при адсорбции бериллия на вольфраме 670
Ждан А. Г., Елинсон М. И. Распределение эмиттированных автоэлектронов по энергиям для полупроводников 671

Письма в редакцию

Пирошниченко Л. С. Фотоэлектронная эмиссия LaB_6 673
Олесковский Ю. М., Грановский В. Л., Михалец Е. Рекомбинационное излучение цезиевой плазмы в магнитном поле 674

Хроника

Вайнштейн Л. А. Симпозиум по дифракции волн 676
Патрушев В. Л., Герштейн Г. М., Красильников В. Я., Венедикт Иванович Калинин 679

Выпуск 5

Попухин В. М. Теорема о кинетической мощности и ее применения к электронно-лучевым приборам (обзор) 683
Митяшев Б. Н. О помехоустойчивости двух способов приема импульсных сигналов 706
Дружинин Г. В. Резервирование элементов электронных схем по нагрузке . . 716
Калинин А. И. О влиянии Земли при дальнем тропосферном распространении ультракоротких волн 723
Новиков В. В., Макаров Г. И. Распространение импульсных сигналов над плоской однородной земной поверхностью 728
Сокурин Ю. Л., Сухановский А. Н., Алексеев Ю. И. Исследование модели крупномасштабных неоднородностей ионосферы радиоастрономическим методом 738
Крылов Г. Н. Структура электромагнитного поля направленных антенн над плоской землей с конечной проводимостью 747
Ишкин А. Я. Об одном методе расчета прямых и изогнутых волноводов сложного сечения в системах, допускающих разделение переменных 754
Ношаков Л. Н. О коэффициенте связи между электронным потоком и замедляющей системой в приборе СВЧ с взаимодействием в поперечном направлении 767
Мусин А. К. О движении плазмы в скрещенных электрическом и магнитном полях 770
Карасев М. Д. Влияние паразитных параметров полупроводникового диода на работу параметрического усилителя 779
Микаэлян А. Л., Васильев А. А. Взаимодействие магнитостатических колебаний в ферритовом образце при регенерации. Ч. II. Условия возбуждения колебаний в общем случае 789
Засов Н. Г., Никитин В. В., Ораевский А. Н. Исследование зависимости частоты молекулярных генераторов от различных параметров. Ч. I (теория, линия $J=3$, $K=2$) 796
Гиулина Г. А., Фещенко Г. А. Спиновые уровни иона Fe^{3+} в корунде 806

Краткие сообщения

Хайтун Ф. И. Об увеличении дальности передачи импульсных сигналов заданной энергии при помехах произвольного спектра 815
Дубинский Б. А. Метод идеального измерения параметров колебания 818
Духов В. А. Характеристическое сопротивление и затухание *TEM*-волны, распространяющейся вдоль многопроводной линии из прямоугольных проводников 820
Явич Л. Р. Замечания по расчету каскадных соединений n одинаковых четырехполюсников 824
Дейтлин М. Б., Ильина Е. М. О форме поля в лампе обратной волны при наличии распределенного затухания 826
Шур А. А., Максимов Г. С. Об одном методе измерения флуктуаций фазы радиоволн при изучении дальнего тропосферного распространения 828
Гершензон Е. М., Птицына Н. Г., Рожкова Г. И., Эткин В. С. Об одноконтурном параметрическом усилителе 829
Захрамеев А. Н. Экспериментальное исследование вынужденных колебаний в параметрически регенерированном колебательном контуре 835
Гершензон Е. М., Эткин В. С. О спектральных и амплитудно-частотных характеристиках сверхрегенеративных параметрических усилителей 837
Цыков Ю. Е. О передаточной функции суперрегенеративного параметрического усилителя 838

Дьяков Ю. Е. Об одной ошибке, допускаемой при рассмотрении двухконтурного параметрического усилителя 841
Кравцов Ю. А. Учет комбинационных частот в системах с периодически меняющейся реактивностью 841
Берестовский Г. Н. Влияние асимметрии на работу двухтактных полупроводниковых преобразователей с внешним возбуждением 84
Карлов Н. В., Пименов Ю. П., Прохоров А. М. Парамагнитный усилитель 10-см диапазона с использованием ионов Fe^{3+} в корунде 84
Микаэлян А. Л., Васильев А. А., Дьяченко В. В. Регенерация в феррите на СВЧ при воздействии продольной накачки 84
Веселаго В. Г. Спиновый генератор 84

Хроника

Спивак Г. В., Верцнер В. Н., Лукьянович В. М., Левин Е. Е., Скаков Ю. А. 3-е Всесоюзное совещание по электронной микроскопии 852
Акопов К. А., Карелина Н. А., Покалякин В. И., Степанов Г. В. Междуведомственный семинар по катодной электронике (17-е заседание) 862

Выпуск 6

Арманд Н. А., Введенский Б. А., Калинин А. И., Колосов М. А., Соколов А. В., Шабельников А. В., Ширей Р. А. Дальнее тропосферное распространение ультракоротких радиоволн (обзор) 867
Хаскинд М. Д. Распространение электромагнитных волн над гиротропной средой 886
Бруевич А. Н. Асинхронные колебания в автогенераторе с двумя степенями свободы в перенапряженном режиме 895
Кинбер Б. Е. Развязки между близко расположенными зеркальными антеннами 907
Хохлов Р. В. К теории ударных радиоволн в нелинейных линиях 917
Бененсон Л. С. Наведенные сопротивления вибратора в волноводе 926
Касаткин Л. В. Измерение радиальных проводимостей аксиально-симметричных систем с индуктивными стенками 934
Барменков О. А., Корнилов С. А., Ломакин Г. В. Теоретическое и экспериментальное исследования делительных клистронов с предварительной группировкой 942
Канавец В. И. Гармоники в потоке электронов на выходе лампы бегущей волны 954
Игрицкий А. Л. Фокусировка электронного пучка в лампе бегущей волны периодическим электростатическим полем 964
Бахрах Л. Э., Жарков Ю. Д. Геометрические параметры электронных пучков при ионной фокусировке 976
Гуревич С. Б. К вопросу об изменении отношения сигнал/шум телевизионной системы, вносимом передающими трубками 982
Брейтман В. М., Кузнецов В. С. Математическая формулировка задач корпускулярной оптики с учетом пространственного заряда 993
Швейкин В. И. Импульсный метод определения параметров дрейфовых триодов 999
Горн Л. С., Хазанов Б. И. О преобразовании импульса тока фотоэлектронного умножителя в импульс напряжения эмиттерным повторителем 1010
Мельников Б. С. Электронная регулировка длительности импульса в L-генераторе на плоскостном полупроводниковом триоде 1015
Басов Н. Г., Страховский Г. М., Черемискин И. В. Исследование зависимости частоты молекулярных генераторов от различных параметров. Ч. II. Линия $J = 3$, $K = 3$ 1020

Краткие сообщения

Карлов Н. В. К вопросу об исследовании замедляющих систем 1029

Письма в редакцию

Малышев В. А. По поводу статьи «К теории магнетронного генератора» . . . 1030

Хроника

Вихляева Р. П., Горьков В. А., Ждан А. Г. Междуведомственный семинар по катодной электронике (18-е заседание) 1031

Выпуск 7

Башаринов А. Е. Вопросы статистики автоматического воспроизведения образов при многокадровом наблюдении 1035
Флейшман Б. С. О переходном режиме загрузки памяти кибернетического устройства статистического воспроизведения образов 1041
Зятицкий В. А. Моделирование загрузки памяти кибернетического устройства методом самоанализа 1049

Нестерук В. Ф. К теории оптимального обнаружения составного сигнала при коррелированных помехах 1055
Стратонович Р. Л. Оптимальный прием узкополосного сигнала с неизвестной частотой на фоне шумов 1063
Дорман М. И. Спектр колебания, частота которого проходит через нуль . . . 1076
Тихонов В. И. Марковский характер огибающей квазигармонических флуктуаций 1082
Рязкин И. Х. О характеристиках нелинейных элементов делителей частоты . . 1092
Иванчиков В. И. Некоторые вопросы теории рефракции электромагнитных волн 1100
Павлов П. П. Электромагнитное поле и распределение тока вдоль бесконечно длинного неизолированного провода в проводящей среде 1106
Хохлов Р. В. О распространении волн в нелинейных диспергирующих линиях 1116
Бененсон Л. С. Расчет фазовой скорости волн в искусственном металлодиэлектрике с учетом гармоник тока на элементах структуры 1128
Шестопалов В. П., Булгаков А. А., Булгаков Б. М. Теоретическое и экспериментальное исследования спирально-диэлектрических антенн 1136
Бахрах Л. Д., Вавилова И. В. Сферические двухзеркальные антенны 1146
Матвеев Р. Ф. Расчет попутного потока в длинной волноводной линии 1157
Гуревич С. Б. Чувствительность телевизионных систем с различными параметрами разложения 1165
Петров Е. Н. К теории плоскоэлектродного триода с нулевым пространственным зарядом в зазоре сетка — анод 1170
Брагинский В. Б., Дианова В. А., Мустель Е. Р. Исследование работы умножителя частоты, использующего нелинейную емкость p — n-перехода 1173
Михайловский Л. К., Макарищев В. П., Поллак Б. П., Фабриков В. А. Нелинейные гиромагнитные эффекты нутационного типа в ферритах 1178
Микаэлян А. Л., Антоньянц В. Я., Турков Ю. Г. Явления взаимной связи резонатора с ферритом 1184
Родак М. И. К расчету поляризаций переменного магнитного поля, соответствующих экстремальным вероятностям перехода при электронном парамагнитном резонансе 1194

Краткие сообщения

Ван Хуань-чжо. Расчет согласующей металлической вставки в волноводе круглого сечения 1202
Федотов А. П., Тепляков В. А. О требованиях к стабильности амплитуд и фаз полей в резонаторах линейного ускорителя 1205
Фетина В. Н. О возбуждении четных гармоник при феррорезонансе 1207
Находкин Н. Г., Мельник П. В. Фотоэффект в области мягких рентгеновских лучей 1209

Письма в редакцию

Петров И. М., Тысяцкий Г. С. По поводу статьи Л. П. Куклева и Ю. П. Озерского «Сравнение двух методов декодирования интервальных кодов» . . 1211
Куклев Л. П., Озерский Ю. П. Ответ на письмо И. М. Петрова и Г. С. Тысяцкого 1213
Хлебников Н. С., Меламид А. Е. К вопросу о влиянии поляризации света на фотоэффект сложных катодов 1215

Выпуск 8

Арманд Н. А., Введенский Б. А. Об учете диаграмм направленности антенн при дифракции радиоволн вокруг Земли 1219
Кубасов П. Е. Исследование пространственно-временных корреляционных связей уровня поля сантиметровых волн при распространении в тропосферной атмосфере 1228
Ширман Я. Д. Статистический анализ оптимального разрешения 1237
Малюжинец Г. Д., Вайнштейн Л. А. Поперечная диффузия при дифракции на импедансном цилиндре большого радиуса. Ч. I. Параболическое уравнение в лучевых координатах 1247
Хаскинд М. Д. Возбуждение волн на импедансной плоскости 1259
Кинбер Б. Е. О дифракции электромагнитных волн на вогнутой поверхности кругового цилиндра 1273
Ваганов Р. Б., Мериакри В. В. Подавление резонансных явлений в многоволновых волноводах 1284
Павлов П. П. Электромагнитное поле и распределение тока вдоль бесконечно длинного изолированного провода в проводящей среде 1293
Виглин С. И. Переходная характеристика коаксиальной системы с периодической структурой 1308
Лазарев А. В., Филимонов Г. Ф. Статический режим плоского магнетрона . . 1316
Постнов Г. А. О возможности существования медленных волн в изотропном плазменном волноводе 1325

Апушкинский Г. П. К вопросу о чувствительности радиометров 1328
Грибников З. С., Компан В. Н., Святогор Л. В. Исследование канальных триодов 1330
Елинсон М. И., Добрякова Ф. Ф., Крапивин В. Ф., Малина З. А., Яснопольская А. А. О теории автоэлектронной и термоавтоэлектронной эмиссий металлов и полупроводников 1342
Коган Ш. М. Тепловое излучение, создаваемое горячими носителями тока в полупроводниках 1354
Дер-Шварц Г. В., Кушнир Ю. М., Розенфельд Л. Б., Зайцев П. В., Безлепкин С. В., Трутнева И. С., Беленький С. А., Титов Л. А. Некоторые вопросы отражательной электронной микроскопии 1358
Верцнер В. Н., Никифорова В. Г., Богдановский Г. А., Козелкин В. В., Щетнев Ю. Ф. Светоэлектронный микроскоп ЭМ-6 1365
Берлага Р. Я., Коноров П. И., Руденок М. И. Электронно-микроскопические исследования поверхности германия 1370
Пилянкевич А. Н. Расчет характеристик рассеяния электронов средних энергий на свободных атомах 1374
Стоянов Н. А., Гришина Н. М. Устранение астигматизма промежуточной линзы электронного микроскопа с помощью стигматора при микродифракции . 1378
Стоянов Н. А. Юстировка электронного микроскопа при помощи электромагнитных полей 1382
Воробьев Ю. В. Анализ аберраций, возникающих из-за дефектов изготовления и юстировки электронных микроскопов 1386

Краткие сообщения

Просин А. В. К расчету полосы пропускания тропосферы при дальнем распространении УКВ 1392
Минкович Б. М., Давидчевский Ю. И. К синтезу антенны с круглым раскрывом 1395
Ильинский Ю. А., Карасев М. Д. Переходные процессы в двухконтурном параметрическом усилителе 1397
Страшкевич А. М. О моделировании и расчете траекторий релятивистских заряженных частиц в электростатических полях 1401
Тропский Ю. В. Двуханодный электронный прожектор для электронных приборов СВЧ 1402
Иванов С. Н. О распределении примесей в области сварного контакта на арсениде галлия 1404
Фоменко В. С. Термоэмиссионные свойства карбидов гафния и ниобия и боридов скандия и тулия 1406

Хроника

Яснопольская А. А., Вихляева Р. П., Екименко Т. М. Междуведомственный семинар по катодной электронике (19-е заседание) 1407

Выпуск 9

Вобзарев Ю. Б., Башаринов А. Е. Об эффективности алгоритмов поиска, основанных на методе пробных шагов управляемой длительности 1411
Виткевич В. В., Кузьмин А. Д., Матвеенко Л. И., Сороченко Р. Л., Удальцов В. А. Радиоастрономические наблюдения советских космических ракет 1420
Филипп Н. Д. О характере флуктуаций радиосигнала на УКВ при распространении над неоднородной поверхностью 1432
Кульман Н. К., Стратонович Р. Л. О некоторых оптимальных устройствах для выделения импульсного сигнала случайной длительности из шума . . . 1442
Широков В. В. Воздействие флуктуаций сигнала на приемное устройство с автоматической регулировкой усиления 1452
Туркин В. К., Левин Г. А. К вопросу о детектировании частотно-модулированных колебаний 1460
Левин Г. А., Туркин В. К. К теории детектирования сложных частотно-модулированных колебаний 1465
Шполянский В. А., Тюфякин Л. С., Корсаков П. П. Фазовая автоподстройка частоты с запаздыванием 1468
Минкович Б. М., Давидчевский Ю. И. О расчете антенн с плоским раскрывом 1482
Вайнштейн Л. А., Малюжинец Г. Д. Поперечная диффузия при дифракции на импедансном цилиндре большого радиуса. Ч. II. Асимптотические законы дифракции в полярных координатах 1489
Морозов Б. Н. Влияние изгиба на свойства периодически диафрагмированных волноводов прямоугольного сечения 1496
Пчельников Ю. Н. Взаимодействие электронного пучка с полем спирали в районе поглощающей вставки 1501

Филимонов Г. Ф. Возбуждение замедляющей линии периодической последовательностью идеально сфокусированных электронных сгустков 1508
Шевчик В. Н., Кураев А. А. Общее дисперсионное уравнение лампы с бегущей волной с периодической замедляющей системой 1519
Старик А. М. О распространении СВЧ-колебаний в волноводе, содержащем катодные части тлеющего разряда 1533
Логинова Т. Ф. Трубчатый электронный пучок конической формы в «коническом» магнитном поле 1540
Лисежников Г. С., Штейншлейгер В. Б. К теории квантового парамагнитного усилителя с бегущей волной 1545
Лайдановский А. С. Исследование автогенератора колебаний низкой частоты на полупроводниковом триоде 1554
Страшкевич А. М. Исследование негауссовских траекторий в поле электростатической квадрупольной линзы 1562
Луцкий В. И. Методика анализа термоэлектронов по энергиям в режиме импульсной эмиссии 1566

Краткие сообщения

Бунимович В. И., Морозов В. А. Об оценке частоты узкополосного сигнала на фоне белого шума 1574
Лросин А. В. О расчете надежности систем тропосферной связи при коррелированных замираниях 1578
Фельдштейн А. Л. Ступенчатые мосты 1581
Никольский В. В. Вариационный принцип для полых систем с анизотропной средой 1583
Денисов А. И. Влияние секционирования на мощность насыщения ЛБВ . . . 1585
Мурина Т. М. Радиоспектроскоп с дисковым резонатором 1586
Берковский А. Г., Цзя Гао. О фокусировке электронов в катодной системе фотоэлектронных умножителей с полупрозрачными катодами 1588
Алесковский Ю. М., Грановский В. Л. Спектроскопическое определение скорости деионизации паров цезия в магнитном поле 1590

Выпуск 10

Шаров А. И. Идеальный прием сигналов оптимального кода 1595
Перепелятник П. А. Автоколебания в генераторе с запаздыванием 1601
Яковлев В. П. Синхронизация автогенератора слабомодулированной внешней силой 1609
Григорьев Ю. В., Хохлов Р. В. Об автогенераторе, параметрически связанном с линейным контуром 1617
Мень А. В. Временные (спектральные) характеристики флуктуаций разностей фаз, возникающих при распространении радиоволн в тропосфере 1625
Захарева М. Ф. Частотная корреляция флуктуаций амплитуд и фаз при использовании остронаправленной антенны 1636
Сюй Янь-шэн. Влияние металлической стенки на магнитостатические колебания малой гиротропной сферы 1645
Синбер Б. Е. О дифракции электромагнитных волн на вогнутой поверхности сферы 1652
Колпаков В. В. Дифракция поверхностных электромагнитных волн на ступеньке импеданса кругового цилиндра 1658
Моргонский В. Я. Определение собственных частот волн высших типов в коаксиальном кабеле с эллиптическими проводниками 1665
Днестровский Ю. Н., Костомаров Д. П. Об одной нелинейной задаче теории электромагнитных волн в плазме 1667
Диденко А. Н., Безматерных Л. Н. К расчету прямоугольных волноводов, нагруженных диэлектрическими диафрагмами 1670
Никольский В. В., Сухов В. Г. О методе Ритца для полых систем с анизотропной средой 1677
Чопаков Л. Н. О целесообразной форме выражения для коэффициента связи при взаимодействии электронного потока с пространственными гармониками замедляющей системы 1685
Власко В. Б., Зюзин-Зинченко А. А., Лопухин В. М. Влияние пульсации сечения электронного потока на коэффициент шума лампы бегущей волны . . 1688
Луговой В. Н. О молекулярном генераторе с двумя собственными частотами колебаний резонатора в пределах ширины линии излучения 1700
Фабриков В. А. О новом принципе усиления колебаний СВЧ на ферритах . . 1707
Соколик А. И. Об эквивалентной схеме цепи отклоняющих пластин электронно-лучевой трубки 1718
Страшкевич А. М. Электростатическая квадрупольная линза, поле которой имеет две плоскости антисимметрии и не имеет плоскостей симметрии 1725
Касалаева Н. Я., Екименко Т. М., Елинсон М. И., Зернов Д. В., Савицкая Я. С., Яснопольская А. А. Исследование некоторых свойств холодного оксидно-магниевого катода с самоподдерживающейся эмиссией 1729

Васильев Г. Ф. Проникновение электрического поля в полупроводник 1741
Первова Л. Я. Определение времени жизни неравновесных носителей тока в полупроводниках по спектральному распределению плотности шума . . 1745
Куркин Ю. Л., Куркина И. С. Прецизионные транзисторные усилители для электронных моделирующих устройств с высокими входными (или выходными) сопротивлениями 1749

Краткие сообщения

Яшкин А. Я. О связи метода неопределенных коэффициентов с методом интегрального уравнения 1757
Мандельштам М. Я. Регулируемый направленный ответвитель с постоянным сдвигом фазы 1761
Зальцман Е. Б., Пояркова В. Е. «Возмущение» резонатора на волну H_{01n} цилиндрическим стержнем 1764
Шушпанов О. Е. Коэффициент связи для изогнутого коаксиального волновода круглого сечения 1767
Бронштейн И. М., Фрайман Б. С. Вторичная и фотоэлектронная эмиссия при адсорбции бериллия и серебра на барии 1769
Яковлев В. Н. Исследование полупроводниковых генераторов импульсов с запаздывающей обратной связью 1770
Бондаренко Б. В., Ермаков С. В., Царев Б. М. Термоэлектронные свойства гафнатов и ренатов бария 1773
Надь Ф. Я. Аномальная вольтамперная характеристика легированного германия 1775

Выпуск 11

Воронцов Ю. И., Ржевкин К. С. Туннельные диоды в усилительных схемах (обзор) 1779
Радченко А. Н., Мирончиков Е. Т. Многотактные исправления одиночных и многократных близко расположенных ошибок в групповых кодах 1805
Ахманов С. А., Хохлов Р. В. О преобразовании случайных сигналов в нелинейных линиях 1813
Литвиненко О. Н. Синтез неоднородных линий по входному сопротивлению, заданному в виде дробно-рациональной функции частоты 1825
Перепелятник П. А. Бигармонические колебания в автогенераторе с запаздыванием при асинхронном соотношении частот 1832
Руткас А. Г. О цепочечном синтезе реактивного многополюсника 1839
Шифрин Я. С. Корреляционные характеристики поля линейной антенны . . . 1846
Хаскинд М. Д. Дифракция волн на щели и ленте, ориентированных перпендикулярно к импедансной плоскости 1859
Любимов Л. А., Веселов Г. И., Бей Н. А. Диэлектрический волновод эллиптического сечения 1871
Шевчик В. Н., Синицын Н. И. Влияние разброса скоростей электронов на работу лампы обратной волны 1881
Иванова В. Д., Михалевский В. С. Плазменное управление частотой генератора типа лампы бегущей волны 1888
Биргер Л. А. Полоса пропускания и коэффициент шума резонансного усилителя на туннельном диоде 1894
Тригубенко В. А., Царев Б. М. О термоэлектронных свойствах гексаборидов и других соединений типа структур внедрения 1900
Резголь И. А. Оптимальные рабочие точки на вольтамперной характеристике термоэлектронного преобразователя энергии 1906
Яблонский Ф. М. Токовое управление зажиганием разряда в декатроне 1914
Белова Н.А., Ковалев А. Н. Некоторые особенности вольтамперной характеристики узких германиевых p — n-переходов 1921
Лотоцкий Л. С. Сопоставление статических и динамических характеристик германиевых диодов при отрицательном смещении 1927

Краткие сообщения

Просин А. В. Переходные шумы при двухлучевом распространении радиоволн 1932
Шустерович А. Н. Об одном случае определения статистических характеристик фазы лампового автогенератора, находящегося под воздействием эдс малой амплитуды 1936
Артеменков Л. И., Галкин И. В. Высокочастотное вращающееся поле в цилиндрическом резонаторе 1939
Корнилов С. А., Лавров В. М. Измерение мощности амплитудных флуктуаций отражательного клистрона 1941
Молоковский С. И. Условие получения минимальных пульсаций электронных потоков, фокусируемых однородным магнитным полем, в системах с частично экранированным катодом 1943

Письма в редакцию

Кононов В. Г. Накопление шумов в накопителе с задержанной обратной связью 1944

Выпуск 12

Есепкина Н. А., Кайдановский Н. Л., Кузнецов Б. Г., Кузнецова Г. В., Хайкин С. Э. Исследование характеристик излучения остронаправленных зеркальных антенн с отражателем переменного профиля 1947
Арманд Н. А. Флуктуации теплового излучения атмосферы на сантиметровых и миллиметровых волнах 1961
Яковлев В. Н. Применение метода медленно меняющихся параметров для исследования нелинейных автоколебательных систем с запаздыванием . . . 1974
Конторович М. И., Петрунькин В. Ю. О наименьшем числе управляемых элементов в антенне с электрическим качанием луча 1982
Кузьмин Н. А., Макаров Т. В. Электромагнитные волны в прямоугольном крестообразном волноводе 1989
Цюй Янь-шэн. Магнитостатические колебания малого гиротропного сфероида, намагниченного перпендикулярно оси вращения 1998
Котик И. П., Сивов А. Н. Распространение волн типа H_{0n} в кольцевом волноводе с диэлектрической оболочкой и металлическим кожухом 2005
Пошаков Л. Н. О применении леммы Лоренца для приближенного расчета постоянных распространения в электронном приборе типа лампы с поперечным взаимодействием 2012
Корнилов С. А. Комбинационный шум в пролетном клистроне 2017
Иванов С. Н., Скворцова Н. Е., Соколов Ю. Ф. Частотные свойства германиевых диодов со сварным контактом при обратных напряжениях 2028
Загаев В. С., Жеребцова А. А., Павленко В. А. Емкость и последовательное сопротивление германиевых диодов 2036
Бонч-Бруевич В. Л., Серебренников П. С. О вольтамперной характеристике туннельного диода 2041
Добрецов Л. Н. О термоэлектронных константах 2054
Остроухов А. А. Влияние отбора тока термоэмиссии на температурный режим работы полупроводникового катода 2063
Моргулис Н. Д., Корчевой Ю. П. Физические свойства цезиевой плазмы термоэлектронного преобразователя энергии 2073
Игнатенко В. П., Мясников А. С. Компенсация ионного пространственного заряда электронами 2084

Краткие сообщения

Синдлер Ю. Б. К вопросу о накоплении шумов и замираний в радиорелейных линиях связи с дальним тропосферным распространением 2093
Уфимцев П. Я. Об отражении металлическими телами радиоволн круговой поляризации 2094
Минкович Б. М. Симметричные диаграммы, реализуемые при помощи круглого излучающего раскрыва 2095
Трохименко Я. К. Зависимость свойств цепочки резонаторов от смещения щелей в смежных диафрагмах 2097
Содержание т. VI журнала «Радиотехника и электроника» за 1961 г. 2100
Именной указатель т. VI журнала «Радиотехника и электроника» за 1961 г. 2110

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ т. VI ЖУРНАЛА «РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА» ЗА 1961 г.

А

Акопов К. А. 5
Аксенов В. И. 3
Алексеев Ю. И. 5
Алесковский Ю. М. 4,9
Альбер С. И. 3
Антоньянц В. Я. 7
Апушкинский Г. П. 8
Арманд Н. А. 6, 8, 12
Артеменков Л. И. 11
Афиногенов Л. П. 4
Ахманов С. А. 11

Б

Багаев В. С. 12
Базаров Е. Н. 1
Бакал М. 4
Барменков О. А. 6
Басалаева Н. Я. 10
Басов Н. Г. 5, 6
Басс Ф. Г. 4
Бахарева М. Ф. 1, 10
Бахрах Л. Д. 7
Бахрах Л. Э. 2, 4, 6
Башаринов А. Е. 7, 9
Безлепкин С. В. 8
Безматерных Л. Н. 10
Бей Н. А. 11
Беленький С. А. 8
Белова Н. А. 1, 11
Бененсон Л. С. 6, 7
Берестовский Г. Н. 5
Берковский А. Г. 9
Берлага Р. Я. 8
Беспалов В. И. 3
Биргер Л. А. 11
Богданов Г. Б. 4
Богдановский Г. А. 8
Бондаренко Б. В. 10
Бонч-Бруевич В. Л. 12
Брагинский В. Б. 7
Брейтман В. М. 6
Бронштейн И. М. 4, 10
Бруевич А. Н. 6
Булгаков А. А. 1, 7
Булгаков Б. М. 1, 7
Бунимович В. И. 9
Бункин Ф. В. 1

В

Вавилова И. В. 7
Ваганов Р. Б. 8
Вайнштейн Л. А. 1, 4, 8, 9
Ван Хуань-чжо 7
Васильев А. А. 4, 5
Васильев В. Б. 3
Васильев В. П. 2
Васильев Г. Ф. 10
Вахрамеев А. Н. 5
Введенский Б. А. 6, 8
Веселаго В. Г. 5
Веселов Г. И. 11
Верцнер В. Н. 5, 8
Виглин С. И. 8
Виткевич В. В. 9
Вихляева Р. П. 6, 8
Воробьев Ю. В. 8
Воронцов Ю. И. 11

Г

Габович М. Д. 1
Галкин И. В. 11
Герценштейн М. Е. 3
Гершензон Е. М. 5
Герштейн Г. М. 4
Гласко В. Б. 10
Горн Л. С. 6
Горьков В. А. 2, 6
Горяинов А. С. 1
Грановский В. Л. 4, 9
Грибников З. С. 8
Григорьев Ю. В. 10
Григорьянц В. В. 1, 2
Гришина Н. М. 8
Гуревич С. Б. 6, 7

Д

Давидчевский Ю. И. 8, 9
Дашенков В. М. 4
Денисов А. И. 9
Дер-Шварц Г. В. 8
Дианова В. А. 7
Диденко А. Н. 10
Днестровский Ю. Н. 10
Добрецов Л. Н. 4, 12
Добрякова Ф. Ф. 8
Дорман М. И. 7
Дружинин Г. В. 4
Дубинский Б. А. 5
Дьяков Ю. Е. 5
Дьяченко В. В. 5
Дядьков С. 4

Е

Евтянов С. И. 4
Екименко Т. М. 8, 10
Елинсон М. И. 2, 4, 8, 10
Елькинд А. И. 2
Еремеев В. И. 2
Ермаков С. В. 10
Есепкина Н. А. 12

Ж

Жаботинский М. Е. 1, 2
Жарков Ю. Д. 6
Ждан А. Г. 4, 6
Жеребцова А. А. 12

З

Зайцев П. В. 8
Зальцман Е. Б. 10
Застенкер Г. Н. 3
Зернов Д. В. 10
Зубенко Ю. В. 3
Зюзин-Зинченко А. А. 10
Зятицкий В. А. 7

И

Иванова В. Д. 11
Иванов С. Н. 8, 12
Иванчиков В. И. 7
Игнатенко В. П. 12
Игнатьев Н. К. 1
Игрицкий А. Л. 1, 2, 4, 6
Ильина Е. М. 1, 5
Ильинский Ю. А. 8

К

Казанцев Ю. Н. 2
Кайдановский Н. Л. 12
Калачев П. Д. 3
Калинин А. И. 5, 6
Калягина Л. А. 4
Канавец В. И. 6
Карасев М. Д. 5, 8
Карачун А. М. 3
Карелина Н. А. 1, 5
Карлова Е. К. 3
Карлов Н. В. 3, 5, 6
Карпеев Г. А. 3
Касаткин Л. В. 2, 6
Каценеленбаум Б. З. 2
Кинбер Б. Е. 4, 6, 8, 10
Кобзарев Ю. Б. 9
Ковалев А. Н. 1, 11
Коган Ш. М. 8
Козелкин В. В. 8
Кокурин Ю. Л. 5
Колосов М. А. 6
Колпаков В. В. 10
Компан В. Н. 8
Кононов В. Г. 11
Кончук Л. В. 4
Коноров П. П. 8
Конторович М. И. 12
Корнилов С. А. 6, 11, 12
Корсаков П. П. 9
Корчевой Ю. П. 12
Костомаров Д. П. 10
Котик И. П. 12
Кравцов Ю. А. 5
Крапивин В. Ф. 8

Красильников В. Я. 4
Крылов Г. Н. 5
Кубасов П. Е. 8
Кузнецов Б. Г. 12
Кузнецов В. С. 6
Кузнецова Г. В. 12
Кузьмин А. Д. 3, 9
Кузьмин Н. А. 12
Куклев Л. П. 7
Кулешов В. Н. 4
Кульман Н. К. 4, 9
Кураев А. А. 9
Куркина Н. С. 10
Куркин Ю. Л. 10
Кушнир Ю. М. 8

Л

Лавров В. М. 11
Лазарев А. В. 8
Ланда П. С. 4
Ланцберг Г. С. 3
Левин Г. А. 9
Левин Е. Е. 5
Лезин Ю. С. 2, 4
Либин В. А. 4
Линь Хай-цюань 2
Литвиненко О. Н. 11
Лобов Г. Д. 1, 2
Логинова Т. М. 9
Ломакин Г. В. 6
Лопухин В. М. 5, 10
Лотоцкий Л. С. 11
Лошаков Л. Н. 5, 10, 12
Луговой В. Н. 10
Лукьянович В. М. 5
Луцкий В. Н. 9
Любимов Л. А. 11

М

Майдановский А. С. 9
Макарищев В. П. 7
Макаров Г. И. 5
Макаров Т. В. 12
Максимов Г. С. 5
Макуха В. И. 2
Малина З. А. 2, 8
Малышева В. С. 1
Малышев В. А. 3, 4, 6
Малюжинец Г. Д. 8, 9
Мандельштам М. Я. 10
Матвеев Р. Ф. 7
Матвеенко Л. И. 9
Меламид А. Е. 7
Мельник П. В. 7
Мельников Б. С. 6
Мень А. В. 10
Мериакри В. В. 8
Микаэлян А. Л. 4, 5, 7
Минкович Б. М. 8, 9, 12
Мирончиков Е. Т. 11
Мирошниченко Л. С. 4
Мисежников Г. С. 9
Митяшев Б. Н. 5
Михайловский Л. К. 2, 7
Михалевский В. С. 3, 11
Михалец Е. 4
Мишин Д. Д. 4
Молоковский С. И. 3, 11
Моргулис Н. Д. 12
Морозов В. А. 9
Морозов Б. Н. 9
Мурина Т. М. 9
Муромцев В. И. 2, 3
Мусин А. К. 5
Мустель Е. Р. 7
Мякишев Г. Я. 2
Мясников А. С. 12

Н

Надь Ф. Я. 10
Находкин Н. Г. 7
Нестерук В. Ф. 7
Никитин В. В. 5
Никифорова В. Г. 8
Никольский В. В. 1, 9, 10
Новиков В. В. 5
Носов Ю. Р. 2
Нудельман П. Я. 2

О

Озерский Ю. П. 7
Ораевский А. Н. 5
Остроухов А. А. 11

П

Павленко В. А. 12
Павлов П. П. 7, 8
Патрушев В. Л. 4
Первова Л. Я. 10
Перепелятник П. А. 10, 11
Персиков М. В. 3
Петров Е. Н. 7
Петров И. М. 7
Петрунькин В. Ю. 12
Пилянкевич А. Н. 8
Пименов Ю. П. 3, 5
Писаренко В. Ф. 4
Пискунов А. К. 2, 3
Покалякин В. И. 2, 5
Поллак Б. П. 7
Поляк И. М. 3
Помазков В. П. 2
Пономарев Н. Г. 2
Порев Н. Д. 4
Постнов Г. А. 8
Пояркова В. Е. 10
Просин А. В. 1, 8, 9, 11
Прохоров А. М. 3, 5
Птицына Н. Г. 5
Штушинский Ю. Г. 3
Пчельников Ю. Н. 9

Р

Радченко А. Н. 11
Рапопорт Г. Н. 2
Ржевкин К. С. 11
Резголь И. А. 11
Ризкин И. Х. 7
Родак М. И. 7
Рожкова Г. И. 5
Розенфельд Л. Б. 8
Рубин С. Б. 1
Руденок М. И. 8
Руткас А. Г. 11

С

Савицкая Я. С. 10
Саломонович А. Е. 3
Самуйлов Г. П. 4
Святогор Л. В. 8
Серебренников П. С. 12
Сивов А. Н. 1, 4, 12
Синдлер Ю. Б. 12
Синицын Н. И. 11
Сиулина Г. А. 5
Скаков Ю. А. 5
Скворцова Н. Е. 12
Сморгонский В. Я. 10
Советов Н. М. 3
Соколик А. И. 10
Соколов А. В. 6
Соколов А. Е. 2
Соколов Ю. Ф. 3, 12
Солнцев Г. С. 3
Соловьев Е. Г. 3
Сороченко Р. Л. 9
Спивак Г. В. 5
Старик А. М. 9
Степанов Г. В. 2, 5
Стоянов П. А. 8
Стратонович Р. Л. 7, 9
Страховский Г. М. 6
Страшкевич А. М. 8, 9, 10
Сулимин А. Д. 2
Сухановский А. Н. 5
Сухов В. А. 5
Сухов В. Г. 10
Сушков А. Д. 3
Сюй Янь-шэн 1, 10, 12

Т

Тартаковский Г. П. 4
Тепляков В. А. 7
Терешин О. Н. 2
Титов Л. А. 8
Тихонов В. И. 7
Тригубенко В. А. 11
Троицкий Ю. В. 8
Трохименко Я. К. 12
Трутнева И. С. 8
Туркин В. К. 9
Турков Ю. Г. 7
Тысляцкий Г. С. 7
Тюфякин Л. С. 9

У

Удальцов В. А. 9
Уфимцев П. Я. 4, 12

Ф

Фабриков В. А. 7, 10
Федоров А. А. 1
Федотов А. П. 1, 7
Фельдштейн А. Л. 2, 9
Фетина В. Н. 7
Фещенко Г. А. 5
Филимонов Г. Ф. 4, 8, 9
Филиппов Ю. А. 4
Филипп Н. Д. 9
Флейшман Б. С. 7
Фоменко В. С. 8
Фрайман Б. С. 10
Фурсей Г. Н. 2

Х

Хазанов Б. И. 6
Хайкин С. Э. 12
Хайтун Ф. И. 5
Хаскинд М. Д. 6, 8, 11
Хлебников Н. С. 7
Хохлов Р. В. 6, 7, 10, 11

Ц

Царев Б. М. 10, 11
Цзя Гао 9
Цейтлин М. Б. 1, 5
Цыбаков Б. С. 4

Ч
Черемискин И. В. 6

Ш
Шабельников А. В. 2, 6
Шаров А. И. 10
Шварц Я. М. 1
Швейкин В. И. 6
Швилкин Б. Н. 3
Шевчик В. Н. 9, 11
Шембель Б. К. 1
Шестопалов В. П. 1, 4, 7
Ширей Р. А. 6
Ширман Я. Д. 8
Широков В. В. 9
Шифрин Я. С. 11
Шишкин Л. А. 1
Шполянский В. А. 9
Штейншлейгер В. Б. 9
Шур А. А. 5
Шустерович А. Н. 11
Шушпанов О. Е. 10

Щ
Щетнев Ю. Ф. 8
Щучинский Я. М. 4

Э
Эткин В. С. 5

Я
Яблонский Ф. М. 11
Явич Л. Р. 5
Якименко И. П. 1, 4
Яковлев В. Н. 10, 12
Яковлев В. П. 10
Яснопольская А. А. 8, 10
Яснопольский Н. Л. 1
Яшкин А. Я. 1, 5, 10

По просьбе Оргкомитета четвертого Международного конгресса по приборам СВЧ публикуется следующая информация.

Четвертый Международный конгресс по приборам СВЧ, организуемый Нидерландским радиообществом при поддержке УРСИ, будет проводиться с 3 по 7 сентября 1962 г. в Голландии [theHague (Kurhaus Hotel Scheveningen)]. Этот конгресс будет продолжением трех предыдущих конгрессов: Парижского (1956 г.), Лондонского (1958 г.) и Мюнхенского (1960 г.).

Основное внимание на предстоящем конгрессе будет уделено последним достижениям в области теории и конструирования приборов СВЧ и связанным с этим областям.

Принимаются доклады по следующим разделам:

1. Диоды и лампы с сеточным управлением.
2. Лампы с модуляцией по скорости.
3. Лампы с бегущей волной.
4. Лампы с обратной волной.
5. Магнетроны и усилители типа «М».
6. Параметрические приборы.
7. Газоразрядные приборы.
8. Мазеры, иразеры, лазеры.
9. Различные приборы (ондуляторы, эффект Черенкова, генераторы гармоник и т. д.).
10. Шумы.
11. Электронная оптика (пушки, фокусировка и т. д.).
12. Резонаторы и замедляющие структуры.
13. Волны пространственного заряда.
14. Измерительная техника.
15. Технология.

Со всеми предложениями и вопросами обращаться по адресу: Congress Office, P. O. Box 62, Eindhoven. Netherlands.

ПОПРАВКИ

В № 4, 1961 г., стр. 488, 7-я строка снизу, следует читать:

$$E_{x2} - E_{x1} = ik\left[l\,(H_{\xi 2} + H_{\xi 1}) - \frac{i}{k}\,L\,\frac{\partial}{\partial \xi}\,(E_{y2} + E_{y1})\right]. \qquad (20)$$

В № 8, 1961 г., стр. 1241, 19-я строка сверху, следует читать:

...соотношение (16)...

В № 10, 1961 г., стр. 1775, 10-я строка сверху, следует читать:

15 VI 1961

CONTENTS

Yesepkina N. A., Kaidanovskiy N. L., Kuznetsov G. V., Khaikin S. E. Investigation of radiation characteristics of high-directional mirror antennas with reflectors of alternating profile 1947

Armand N. A. Fluctuations of atmospheric thermal radiation on centimetre and millimetre waves 1961

Yakovlev V. N. Application of a slowly changing parameters method for investigation of non linear self-oscillation systems with delay 1974

Kontorovich M. I., Petrunkin V. Yu. The least number of controled elements in an antenna with the electrical scanning of a beam 1982

Kuzmin N. A., Makarov T. V. Electromagnetic waves in a rectangular cross-sectional waveguide 1989

Sui Ien-shen. Magnetostatic oscillations of a small gyrotropic spheroid magnetized perpendicularly to the rotation axis 1998

Kotik I. P., Sivov A. N. Propagation of H_{0n}-type waves in a ring waveguide with a dielectric cover and a metal jacket 2005

Loshakov L .N. Application of Lorenz' lemma for the approximate calculation of propagation constants in a transverse-interaction tube 2012

Kornilov S. A. Combination noise in a transit klystron 2017

Ivanov S. N., Skvortsova N. E., Sokolov Yu. F. Frequency properties of reverse voltage germanium diodes with welded contacts 2028

Bagaev V. S., Zherebtsova A. A., Pavlenko V. A. Capacitance and sequential resistance of germanium diodes. 2036

Bonch-Bruevich V. L., Serebrennikov P. S. Voltampere characteristic of a tunnel diode 2041

Dobretsov L. N. Thermoelectron constants 2054

Ostroukhov A. A. Influence of thermoemission current selection on the temperature operation regime of a semiconductor cathode 2063

Morgulis N. D., Korchevoi Yu. P. Physical properties of the cesium plasma of a thermoionic energy converter. 2074

Ignatenko V. P., Miasnikov A. S. Compensation of an ion space charge by electrons 2083

BRIEF REPORTS

Sindler Yu. B. Storage of noise and fadings in radio relay systems with distant tropospheric propagation 2093

Ufimtsev P. Ya. Reflection of circular polarization radio waves by metal bodies 2094

Minkovich B. M. Symmetrical diagrams realized by means of a round aperture 2095

Trokhimenko Ya. K. Dependence of cavities chain properties upon displacement of slots in adjacent diaphragms 2097

Contents for 1961 (vol. VI) 2100

Author index for 1961 (vol. VI) 2110

Цена 1 руб. 38 коп.

О КОНКУРСАХ НА СОИСКАНИЕ ЗОЛОТОЙ МЕДАЛИ ИМЕНИ А. С. ПОПОВА И НА СОИСКАНИЕ ПРЕМИИ ИМЕНИ А. С. ПОПОВА

Отделение технических наук Академии наук СССР сообщает, что в 1962 г. будут проведены конкурсы на соискание золотой медали имени А. С. Попова и премии имени А. С. Попова.

Золотая медаль имени А. С. Попова присуждается за выдающиеся научные работы и изобретения в области радио, выполненные за 1959—1961 гг.

Премия имени А. С. Попова в размере 1500 руб. присуждается за наиболее крупные научные работы в области радиотехники и электроники, выполненные за 1959—1961 гг.

Право на соискание золотой медали имени А. С. Попова имеют как советские, так и зарубежные ученые.

Право на соискание премии имени А. С. Попова имеют только советские ученые.

Работы на конкурс могут выдвигаться научными учреждениями СССР и союзных республик, высшими учебными заведениями, конструкторскими бюро, научными обществами, ведомствами, действительными членами и членами-корреспондентами АН СССР.

На соискание золотой медали и премии имени А. С. Попова представляются:

опубликованные научные работы (серии работ), материалы научного открытия или изобретения — в 3-х экз.

Мотивированное представление, включающее научную характеристику работы, ее значение для развития науки и народного хозяйства, а также краткие биографические сведения об авторе с перечнем его основных научных работ и изобретений.

Материалы с надписью «На соискание золотой медали имени А. С. Попова и «На соискание премии имени А. С. Попова» направлять во Всесоюзный научный совет по радиофизике и радиотехнике Академии наук СССР по адресу: *Москва, К-9, Моховая, 11.*

Срок представления работ — до 1 февраля 1962 г.

Справки по телефону: Б 9-70-88.

1961 DEC 1